



Universidad de Castilla-La Mancha
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Albacete



TESIS DOCTORAL

Modelo de elementos finitos
para el cálculo de arcos.
Validación en estructuras
agroindustriales de acero.

Directores:

Dr. D. Luis López García

Dr. D. Miguel Angel Garcimartín Molina

Doctorando:

D. Jesús Antonio López Perales

Noviembre 2003



Universidad de Castilla-La Mancha
Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Albacete



Modelo de elementos finitos para el cálculo de arcos. Validación en estructuras agroindustriales de acero.

Tesis doctoral presentada por D. Jesús Antonio López Perales en cumplimiento de los requisitos necesarios para optar al grado de Doctor, dirigida por D. Luis López García y D. Miguel Angel Garcimartín Molina, Doctores Ingenieros Agrónomos.

Ciudad Real, noviembre de 2003

Doctorando

Jesús Antonio López Perales

VºBº

Luis López García

Miguel Angel Garcimartín Molina

a Amparo

Agradecimientos

Noviembre de 2003. Habiendo llegado a este punto realizo una mirada retrospectiva y compruebo la lejanía de aquella exposición de Torroja, principio de una apasionante inquietud que se ha ido cubriendo de respuestas en el transcurso de estos bonitos años y que espero se materialicen en futuros proyectos.

Salvo la persecución de un sentimiento continuo de culpa por no haber dedicado a mi familia el tiempo debido y por la sensación de abandono de los amigos, estos cuatro años han representado una sucesión de buenos momentos en el ámbito intelectual. Es por ello que quisiera comenzar dando las gracias por la paciencia manifestada a mi familia y mis amigos, con una intención clara de enmienda y con el deseo de un mejor reparto de las horas del día en tiempos venideros.

Por otro lado, quisiera manifestar mi profunda gratitud a las personas que han hecho posible la realización de este trabajo, y en especial:

Al Dr. D. Luis López García, Catedrático de Ingeniería Rural en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real (UCLM), por ser profesor, tutor, director, compañero y amigo desde que comencé los estudios de ingeniero técnico agrícola, allá por 1985 y al Dr. D. Miguel Angel Garcimartín Molina, Profesor Titular de Construcción en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Agrónomos de Madrid (UPM) por asumir la dirección de esta tesis, por su disposición y por sus valiosos consejos.

Al Dr. D. Juan José López Cela, Profesor Titular de Mecánica de los Medios Continuos en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Ciudad Real (UCLM) por su inestimable colaboración en el manejo de ANSYS. A D. Pedro Jesús Alcobendas Cobo, a la Dra. D^a. Rocío Gómez Gómez, a D^a Asunción Sánchez Villalón y a la Dra. D^a. Marta María Moreno Valencia, Profesor Asociado de Ingeniería Agroforestal, Catedrático de Ingeniería Química, Profesora Titular de Filología Inglesa y Profesor Asociado de Producción Vegetal, respectivamente, en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real (UCLM) por su persistente ayuda.

Y sobre todo, y por todo, a la Dra. D^a. Amparo Moreno Valencia, Profesor Asociado de Ingeniería Agroforestal en la Escuela Universitaria de Ingeniería Técnica Agrícola de Ciudad Real (UCLM), mi mujer, mi compañera y mi amiga. Gracias por leer, corregir, releer y soportar el desarrollo de la tesis.

Por último, un recordatorio a un ser precioso que llenó de felicidad este tiempo y que nos dejó prematuramente, y que sin duda vivirá en nosotros por siempre. Gracias Lola.

Resumen

En el mundo de la ingeniería, desde siempre ha habido una gran atracción por la forma curva del arco y su fenómeno resistente. Su aparente sencillez y la pureza de la línea que configura su forma encierra una estructura que se adapta perfectamente para resistir cargas y vencer grandes luces.

Sin embargo, no es la forma curva la cualidad fundamental del arco, pues lo esencial de esta estructura se encuentra en los esfuerzos longitudinales de contrarresto, que se visualizan en los empujes horizontales sobre los apoyos, pese a que las cargas externas sean verticales.

En edificación agroindustrial el uso del arco ya denota la búsqueda de una estética que se aleje de la mediocridad general en el diseño que rige este tipo de estructuras. En arcos de cubierta predominan las sobrecargas variables frente a las cargas constantes, por lo que el intento de búsqueda de una directriz que se adapte al antifunicular de una determinada combinación de cargas pierde relevancia frente a otras consideraciones, como la estética, la singularidad de la edificación, la facilidad de doblado del acero bajo radio constante, etc.

La tipología estudiada se centra en arcos de acero con los extremos empotrados o articulados, con la posibilidad de que los apoyos estén a nivel o, por el contrario, que exista un desnivel entre las extremidades.

Continuando con parámetros de diseño, otro factor fundamental es el rebajamiento del arco, o relación entre flecha y luz, que va a tener influencia en el diseño y en los empujes en los apoyos. Compaginando ambos criterios, se decide estudiar arcos con relaciones comprendidas entre $1/5$ y $1/10$, recomendando el intervalo $1/6-1/8$.

A la hora de estudiar métodos de cálculo, el estudio se inicia con el método de los desplazamientos, que resuelve la cuestión con una perspectiva pedagógica, al seguir las deformaciones el desarrollo del fenómeno físico correspondiente, a diferencia de los métodos engoblados bajo el nombre de energéticos, que hacen intervenir entidades no tangibles que remiten directamente a las expresiones fundamentales de la flexión, compresión y cortadura.

Especial hincapié se ha realizado en el estudio de los arcos mediante el método de los elementos finitos. Se desarrolla un modelo, denominado elemento de pórtico plano, en el que previamente se realiza una discretización del arco en elementos rectos. El elemento de pórtico plano se ha determinado

siguiendo los modelos de Timoshenko y de Euler-Bernoulli, obteniéndose todas las expresiones que se resumen en la matriz de rigidez completa del elemento.

Por último se analiza el pandeo de estas estructuras, comenzando por estudios empíricos para arcos concretos y continuando con la generalización y estudio del pandeo global mediante autovalores, obteniéndose la matriz de rigidez geométrica del arco. Además se introduce la base matemática para analizar el pandeo no lineal de los arcos.

Todo este análisis teórico se ha plasmado en la realización de aplicaciones informáticas para el estudio de la tipología mencionada, realizada en la hoja de cálculo Microsoft Excel, con el deseo de que pueda ejecutarse sin restricciones en la mayor parte de los ordenadores personales existentes, pues su uso puede calificarse de universal.

Así, en cuatro ficheros, «Arcos parabólicos empotrados», «Arcos parabólicos biarticulados», «Arcos circulares empotrados» y «Arcos circulares biarticulados», mediante la introducción del mínimo número de datos posible (luz, flecha, desnivel entre apoyos, características mecánicas del perfil seleccionado, cargas verticales, horizontales y térmicas) se efectúa el cálculo del arco correspondiente. Además de las solicitaciones máximas y de las reacciones en los extremos, se efectúa el cálculo del pandeo global del arco, realizado por el método de los autovalores.

De este modo se ha podido comprobar la coincidencia de los resultados obtenidos con estas sencillas hojas de cálculo con los que proporcionan paquetes de software altamente especializados, en los que la labor de introducción de datos puede llegar a convertirse en tediosa, pues la discretización del arco debe realizarse de forma manual, y la definición de los nudos y de las cargas representa un esfuerzo considerable.

También se ha obtenido la carga crítica de pandeo para distintos arcos biarticulados y biempotrados, con directrices circular y parabólica, de luces comprendidas entre 20 y 40 m, y con flechas que oscilan entre rebajamientos de 1/5 y 1/10, dimensionados con perfiles IPN 300 e IPN 400. Este modo de pandeo corresponde a la situación más habitual de carga vertical uniforme distribuida uniformemente a lo largo del eje del arco. También se incluyen tablas con los esfuerzos axiales críticos de pandeo en esas circunstancias, con el objeto de comparar los resultados con las expresiones proporcionadas por distintas normas y autores.

Además, mediante la aplicación informática ANSYS se ha podido calcular el pandeo no lineal de la estructura, lo que ha permitido determinar que los valores que se obtienen aplicando esta metodología son un 15-30 por ciento inferiores a los que consiguen aplicando el método lineal de los autovalores.

Summary

In the engineering world, the curved arch shape and its resistant phenomenon have always attracted great attention. Its apparent simplicity and the linear purity shaping its form involve a structure that is perfectly adapted to resist loads and overcome big spans.

However, it is not the curved shape the basic quality of the arch. The most important aspect of this structure resides in the longitudinal counteracting strengths that are shown in the horizontal reactions at supports, in spite of the vertical external loads.

In a farming-industrial construction, the use of the arch already reveals the searching of an aesthetics that moves away from the general mediocrity in the design governing this type of structures. In deck arches the variable overloads prevail over the constant loads, consequently the attempt to search a guideline adapted to the antifunicular of a determined combination of loads loses relevance if other considerations are kept in mind, such as aesthetics, building singularity, easiness of steel folded under a constant radius, etc.

The studied typology is focused on the fixed and two-hinged ended steel arches with the possibility that the supports are at level or, on the contrary, with an existing uneven level between the edges.

Continuing with design parameters, other important factor is the lowering of the arch, or the connection between the rise and the span, which influences the design and the horizontal strengths on the supports. Complementing both criteria, to study arches with rise-to-span ratios ranging between $1/5$ and $1/10$ was decided, recommending the $1/6$ - $1/8$ interval.

When dealing with calculation methods, the study starts with the displacement method, which solves the question with a pedagogical perspective by following the strain of the proper physical phenomenon, unlike the labelled methods under the name of energetics, with intervening non-factual entities that lead directly to the comprehensive expressions of the bending, compression and transverse shear.

Special emphasis has been placed on the study of the arches through the finite element method. A model known as plane frame element has been developed, where previously a discretization of the arch in straight elements has been carried out. The plane frame element has been determined following

the pattern of Timoshenko and of Euler-Bernoulli, obtaining all the expressions summarised in the stiffness matrix of the element.

Finally the buckling of these structures has been analysed, starting from empirical studies for specific arches and going on with the generalization and global buckling study by means of eigenvalue, obtaining the geometric stiffness matrix of the arch. Apart from that, the mathematical base is shown to analyse the non-linear buckling of the arches.

All these theoretical analyses have been shown in the elaboration of four computing applications for the study of the typology mentioned before, done in a spreadsheet called Microsoft Excel, with the aim that it can be fulfilled without any restrictions in most personal computers, since its use can be considered as universal.

Therefore, in the files «Fixed Parabolic Arches», «Two-Hinged Parabolic Arches», «Fixed Circular Arches» and «Two-Hinged Circular Arches», through the introduction of the possible minimal number of data (span, rise, unlevelled between supports, mechanical characteristics of the selected profile, vertical loads, horizontal and thermal), the proper calculation is done. Besides the maximum strengths and the reactions at supports, the global buckling of the arch has been calculated by means of the eigenvalue analysis.

In this way, it can be proven the coincidence of the results obtained by means of these four simple spreadsheets with the results provided by highly specialised packages, in which the work of inserting data can be so tedious, due to the fact that the discretization of the arch must be done manually and the definition of the nodal points and the load represents a considerable effort.

The critical buckling load for the different two-hinged and fixed ended parabolic and circular archs has also been obtained, with spans ranging between 20 and 40 m, and with rise-to-span ratios which vary from 1/5 to 1/10, measured with IPN 300 and IPN 400 profiles. This type of buckling corresponds to the most usual uniform vertical load uniformly distributed along the arch axis. There are also tables included with the critical axial strengths in those circumstances with the object of comparing the results with the expressions provided by different rules and authors.

Besides, by means of the computing application ANSYS, it has been possible to calculate the non linear buckling of the structure, which has allowed to determine that the values obtained applying this methodology are a 15-30 per cent inferior to those obtained applying the linear eigenvalue analysis.

índice

Capítulo 1.	
El estado del arte	1
1. Introducción	3
2. El arco	8
2.1. Reconocimiento	8
2.2. La forma curva.....	9
2.3. En busca de la directriz óptima	10
2.4. Rebajamiento del arco	14
2.4.1. Diseño del arco	14
2.4.2. Empuje sobre los estribos	15
2.5. Tipología objeto de estudio	16
3. Bases de cálculo.....	16
4. Métodos de cálculo	19
4.1. Método de los desplazamientos.....	19
4.2. Métodos energéticos	24
4.3. Método de los elementos finitos.....	25
5. Pandeo de arcos.....	27
Capítulo 2.	
Cálculo de arcos por el método de los desplazamientos.....	31
1. Estructuras isostáticas auxiliares.....	33
1.1. La viga curva	34
1.2. El arco en voladizo o pescante.....	36
2. Cálculo de las deformaciones	38
3. Cálculo de las reacciones.....	42
4. Efecto de la temperatura	45
5. Centro elástico. Método abreviado de Muller-Breslau	48
6. Arcos hiperestáticos.....	52
6.1. Arcos biempotrados.....	52
6.1.1 Caso de arco simétrico	55

6.2. Arcos biarticulados.....	58
-------------------------------	----

Capítulo 3.

Cálculo de arcos por métodos energéticos	61
1. Introducción	63
2. Estructuras isostáticas auxiliares.....	63
2.1. Viga curva isostáticamente sustentada.....	64
2.2. Arco en voladizo.....	65
3. Arcos biarticulados	66
3.1. Interpretación de los coeficientes de la ecuación de deformación.....	71
3.2. Cálculo tabular.....	73
3.3. Arco parabólico biarticulado con inercia reducida constante y sometido a una carga uniforme según la cuerda.....	75
3.2. Efecto de la temperatura	80
4. Arcos biempotrados	82
4.1. Interpretación de los coeficientes de la ecuación de deformación.....	85
4.2. Arco parabólico doblemente empotrado, con inercia reducida constante .	89
4.3. Efecto de la temperatura	94

Capítulo 4.

Estudio de arcos por el método de elementos finitos:

Elementos de pórtico plano de Timoshenko.....	97
1. Discretización del arco con elementos de pórtico plano	99
2. Teoría básica de la flexión de Timoshenko.....	101
2.1. Campo de desplazamientos.....	103
2.2. Campo de deformaciones	103
2.3. Campo de tensiones	105
2.4. Esfuerzos	106
2.5. Principio de los trabajos virtuales.....	108
3. Formulación de elementos finitos.....	109
3.1. Discretización del campo de movimientos	109
3.1.1 Introducción.	109
3.1.2. Elementos Lagrangianos	110
3.1.3. Formulación isoparamétrica	112

3.1.4. Campo de movimientos.....	114
3.2. Discretización del campo de deformaciones generalizadas.....	115
3.3. Obtención de la matriz de rigidez local	117
3.3.1. Integración numérica	119
3.3.2. Matriz de rigidez local	121
3.4. El efecto de bloqueo por cortante	124
3.4.1. Introducción	124
3.4.2. Estudio del efecto de bloqueo por cortante	125
3.4.3. Integración reducida	127
3.4.4. Módulo de rigidez residual.....	128
3.5. Transformación a ejes globales.....	135
3.6. Ensamblaje de las ecuaciones.....	137
3.7. Cálculo de deformaciones y esfuerzos	138

Capítulo 5.

Estudio de arcos por el método de elementos finitos:

Elementos de pórtico plano de Euler-Bernoulli.....	139
--	-----

1. Teoría básica de la flexión de Euler-Bernoulli	141
1.1. Condiciones de equilibrio	141
1.2. Campo de desplazamientos.....	142
1.3. Campo de deformaciones	144
1.4. Campo de tensiones	145
1.5. Relaciones constitutivas	145
1.6. Principio de los trabajos virtuales.....	146
2. Formulación de elementos finitos.....	147
2.1. Discretización del campo de movimientos	147
2.2. Discretización del campo de deformaciones generalizadas.....	151
2.3. Obtención de la matriz de rigidez local	152
2.4. Matriz de rigidez global y ensamblaje de ecuaciones.....	159
2.5. Obtención del vector de fuerzas equivalentes	159
2.5.1. Carga uniformemente distribuida $q_{x'}$	159
2.5.2. Carga uniformemente distribuida $q_{z'}$	161
2.5.3. Carga concentrada $P_{x'}$	162
2.5.4. Carga concentrada $P_{z'}$	163

2.5.5. Par concentrado M_x'	165
-------------------------------------	-----

Capítulo 6.

Pandeo de arcos	169
-----------------------	-----

1. Introducción	171
2. Métodos simplificados.....	172
2.1. Reglas CB-71 para cálculo de arcos biarticulados	173
2.2. Norma DIN-1052 para cálculo de arcos articulados.....	173
3. Arcos circulares sometidos a presión radial uniforme.....	174
3.1. Arcos biarticulados.....	177
3.2. Arcos biempotrados.....	179
4. Arcos con carga vertical y directriz parabólica	180
5. Método matricial	183
5.1. Bifurcación de equilibrio.....	183
5.2. Hipótesis de cálculo.....	185
5.3. Determinación de la carga crítica.....	186
5.4. Matriz de rigidez geométrica.....	188
5.4.1. Obtención de las formas modales de deformación.....	191
5.4.2. Obtención de los coeficientes de rigidez geométrica en coordenadas locales	197
5.5. Ecuación matricial, coeficiente crítico y forma modal de pandeo.....	201
5.6. Procedimiento operativo.....	202
6. Análisis de pandeo no lineal.....	203
6.1. Solución del problema	205
6.2. Procedimiento de Newton Raphson.....	207
6.3. Obtención de la solución no lineal con ANSYS	210

Capítulo 7.

Aplicación informática y validación de los resultados	215
---	-----

1. Introducción	217
2. Arcos circulares y arcos parabólicos. Cálculos.....	219
2.1. Validación de resultados	223
3. Pandeo de arcos.....	240
3.1. Cálculo del pandeo mediante análisis de autovalores.....	240

3.1.1. Comprobación de resultados	253
3.2. Cálculo no lineal	255
4. Conclusiones	258
 Bibliografía	 263

Índice de figuras

Capítulo 1. El estado del arte

Figura 1.1.	Tríptico de la exposición conmemorativa del centenario del nacimiento de Eduardo Torroja.....	3
Figura 1.2.	Maqueta del Hipódromo de la Zarzuela. Proyecto de E. Torroja (1935)	4
Figura 1.3.	Maqueta del Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949)	4
Figura 1.4.	Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949).....	5
Figura 1.5.	Detalle de la cubierta del Hangar de Cuatro Vientos. Proyecto de E. Torroja (1949)	6
Figura 1.6.	Proyecto de Polideportivo (Rozalén, 2000)	6
Figura 1.7.	Tríptico del Grupo Español de la IABSE anunciando un seminario sobre «Tendencias en normativa y diseño en estructuras metálicas de edificación».....	7
Figura 1.8.	Inscripción en el templete funerario del Puente de Alcántara.....	8
Figura 1.9.	Carga vertical, componentes horizontales en las reacciones y esfuerzos longitudinales de contrarresto en un arco.	9
Figura 1.10.	Ausencia de componentes horizontales en las reacciones bajo carga vertical en una viga curva isostática.....	10
Figura 1.11.	Elección de la directriz del arco	11
Figura 1.12.	Variación del empuje de un arco en función de su flecha.....	15
Figura 1.13.	Distribución de tensiones en una pieza prismática de directriz curva	17
Figura 1.14.	Arco en voladizo obtenido al liberar un apoyo	20
Figura 1.15.	Arco en voladizo con extremo libre unido al centro elástico	21
Figura 1.16.	Arco biempotrado cortado por la clave.....	21
Figura 1.17.	Variante para obtener arcos en voladizo a partir de un arco biempotrado.....	21
Figura 1.18.	Esfuerzos en una rebanada de arco bajo carga	23

Capítulo 2. Cálculo de arcos por el método de los desplazamientos

Figura 2.1.	Estructuras isostáticas auxiliares	33
Figura 2.2.	Comparación arco biapoyado- viga curva.....	33
Figura 2.3.	Viga en arco	34
Figura 2.4.	Viga en arco y su proyección.....	36
Figura 2.5.	Arco en voladizo o pescante	37
Figura 2.6.	Arco en voladizo y su proyección.....	38
Figura 2.7.	Deformación que provoca N	39
Figura 2.8.	Deformación que provoca Q	39
Figura 2.9.	Deformación que provoca M	40
Figura 2.10.	Deformaciones según los ejes x, z	40
Figura 2.11.	Deformaciones provocadas por un giro dq	41
Figura 2.12.	Arco en ménsula con aranques a nivel.....	43
Figura 2.13.	Obtención de M, N y Q en un arco biempotrado.....	43
Figura 2.14.	Alargamiento uniforme de la directriz	46
Figura 2.15.	Deformación angular uniforme de la directriz	47
Figura 2.16.	Ejes elásticos en un arco simétrico	48
Figura 2.17.	Ejes elásticos en un arco asimétrico	50
Figura 2.18.	Deformaciones del centro elástico	51
Figura 2.19.	Alargamiento uniforme de la directriz (centro elástico).....	55
Figura 2.20.	Arco biempotrado simétrico con carga simétrica.....	55
Figura 2.21.	Arco biempotrado simétrico con carga antimétrica	56
Figura 2.22.	Alargamiento uniforme de la directriz en un arco biempotrado simétrico.....	57
Figura 2.23.	Ejes elásticos en un arco biarticulado.....	59
Figura 2.24.	Alargamiento uniforme de la directriz en arcos biarticulados.....	60

Capítulo 3. Cálculo de arcos por métodos energéticos

Figura 3.1.	Aplicación del PTV para obtener la deformación horizontal	64
Figura 3.2.	Aplicación del PTV en arcos en ménsula.....	65

Figura 3.3.	Arco biarticulado.....	66
Figura 3.4.	Viga curva apoyada en dilatación en su extremo izquierdo.....	66
Figura 3.5.	Arco biapoyado.....	66
Figura 3.6.	Efectos de la causa deformadora.....	71
Figura 3.7.	Efectos de la causa virtual.....	72
Figura 3.8.	Obtención de d_{11} mediante el PTV.....	73
Figura 3.9.	Construcciones para el cálculo tabulado de arcos.....	74
Figura 3.10.	Arco biarticulado parabólico bajo carga uniforme.....	75
Figura 3.11.	Polígono de presiones en un arco biarticulado rebajado.....	78
Figura 3.12.	Línea de presiones en un arco peraltado.....	79
Figura 3.13.	Momentos en una viga bajo carga uniforme.....	80
Figura 3.14.	Efectos del aumento de temperatura.....	81
Figura 3.15.	Efectos del empuje virtual $H_t=1$	81
Figura 3.16.	Arco en ménsula con arranques a nivel.....	82
Figura 3.17.	Arco biempotrado con arranques a nivel.....	83
Figura 3.18.	Deformación de un arco en voladizo ante cargas externas.....	85
Figura 3.19.	Deformación de un arco en voladizo ante un empuje horizontal H_1 unidad aplicado en el extremo libre.....	86
Figura 3.20.	Deformación de un arco en voladizo ante un empuje vertical V_1 unidad aplicado en el extremo libre.....	86
Figura 3.21.	Deformación de un arco en voladizo ante un par M_1 unidad aplicado en el extremo libre.....	86
Figura 3.22.	Arco parabólico biempotrado de inercia reducida Constante: Secciones.....	89
Figura 3.23.	Reacciones que aparecen para un desplazamiento horizontal d_1	91
Figura 3.24.	Reacciones que aparecen para un desplazamiento vertical D_1	92
Figura 3.25.	Reacciones que aparecen para un giro q_1	93
Figura 3.26.	Ejes elásticos para el estudio del efecto de la temperatura.....	95
Capítulo 4.	Estudio de arcos por el método de elementos finitos: Elementos de pórtico plano de Timoshenko	
Figura 4.1.	Geometría de una arco plano.....	99

Figura 4.2.	Aproximación a la geometría real de un arco con diferente número de elementos rectos	100
Figura 4.3.	Discretización de un arco con elementos de pórtico plano	101
Figura 4.4.	Descomposición de una carga vertical uniformemente repartida con respecto a los ejes locales del elemento 1-2.....	101
Figura 4.5.	Deformación y giro de la sección normal a la fibra media de un elemento de pórtico plano, según la teoría de la flexión de Timoshenko	102
Figura 4.6.	Distribución de tensiones normales. La distribución supuesta coincide con la distribución exacta	105
Figura 4.7.	Distribución de tensiones tangenciales. La distribución a) es la distribución supuesta. En b) se muestra la distribución exacta	106
Figura 4.8.	Definición del sistema de coordenadas natural. Geometría real y normalizada del elemento.....	110
Figura 4.9.	Elemento de pórtico plano de dos nodos. Interpolación de los movimientos y funciones de forma	114
Figura 4.10.	Viga en voladizo. Análisis con un elemento de 2 nodos	125
Figura 4.11.	Ejes locales de un elemento y ejes globales de la estructura	135
Capítulo 5.	Estudio de arcos por el método de elementos finitos: Elementos de pórtico plano de Euler-Bernoulli	
Figura 5.1.	Elemento de pórtico plano sometido a cargas uniformes según los ejes x, z . Equilibrio de una rebanada aislada.....	142
Figura 5.2.	Discretización de un arco con elementos de pórtico plano	143
Figura 5.3.	Deformación y giro de la sección normal a la fibra media de un elemento de pórtico plano, según la teoría de la flexión de Euler-Bernoulli.....	143
Figura 5.4.	Convenio de signos para la tensión $\sigma_{x'}$, el momento flector $M_{x'}$, el esfuerzo axial $N_{x'}$ y el esfuerzo cortante $Q_{x'}$	145
Figura 5.5.	Elemento de pórtico plano de dos nodos	148
Figura 5.6.	Funciones de forma del elemento de pórtico plano de Euler-Bernoulli.....	151
Figura 5.7.	Esfuerzos en los extremos de un segmento de viga.....	156
Figura 5.8.	Carga uniformemente distribuida $q_{x'}$	160
Figura 5.9.	Carga uniformemente distribuida $q_{z'}$	161

Figura 5.10. Carga concentrada P_x' 162
 Figura 5.11. Carga concentrada P_z' 164
 Figura 5.12. Par concentrado M_x' 165

Capítulo 6. Pandeo de arcos

Figura 6.1. Pandeo de arcos biarticulados..... 173
 Figura 6.2. Pandeo de un arco circular sometido a presión radial
 uniforme 175
 Figura 6.3. Construcciones geométricas para analizar el pandeo en
 un tramo infinitesimal 176
 Figura 6.4. Pandeo de arcos circulares biarticulados sometidos a
 presión radial uniforme..... 177
 Figura 6.5. Empuje crítico en un arco 179
 Figura 6.6. **Pandeo de arcos circulares biempotrados con carga radial uniforme ..** 180
 Figura 6.7. Pandeo de arcos parabólicos biarticulados bajo carga uniforme..... 181
 Figura 6.8. Pandeo de arcos parabólicos biempotrados bajo carga uniforme.... 182
 Figura 6.9. Bifurcación del equilibrio en una barra cargada 184
 Figura 6.10. Influencia del esfuerzo axial sobre una barra ij 190
 Figura 6.11. Geometría de las deformaciones..... 191
 Figura 6.12. Forma modal de deformación para $d_2=1$ 192
 Figura 6.13. Forma modal de deformación para $d_3=1$ 193
 Figura 6.14. Forma modal de deformación para $d_5=1$ 195
 Figura 6.15. Forma modal de deformación para $d_6=1$ 196
 Figura 6.16. Solución de Newton-Raphson. Primera iteración 208
 Figura 6.17. Solución de Newton-Raphson. Segunda iteración 209
 Figura 6.18. «Load steps», «substeps» y «time» 211
 Figura 6.19. Procedimiento de Newton-Raphson incremental..... 212

Capítulo 7. Aplicación informática y validación de los resultados

Figura 7.1. Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga
 vertical uniforme..... 221
 Figura 7.2. Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga
 horizontal uniforme..... 222

Figura 7.3.	Deformada de un arco parabólico biempotrado ante una carga térmica	222
Figura 7.4.	Axiles en un arco parabólico biempotrado ante una carga vertical uniforme	222
Figura 7.5.	Momentos en un arco parabólico biempotrado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme	223
Figura 7.6.	Esfuerzo cortante en un arco parabólico biempotrado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme	223
Figura 7.7.	Axiles en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme	223
Figura 7.8.	Momentos en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme	224
Figura 7.9.	Cortante en un arco parabólico biempotrado ante una carga horizontal uniforme	224
Figura 7.10.	Axiles en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura	224
Figura 7.11.	Cortante en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura	225
Figura 7.12.	Momentos en un arco parabólico biempotrado ante un incremento de temperatura	225
Figura 7.13.	Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga vertical uniforme	232
Figura 7.14.	Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme	232
Figura 7.15.	Deformada de un arco parabólico biarticulado ante una carga térmica	232
Figura 7.16.	Axiles en un arco parabólico biarticulado ante una carga vertical uniforme	233
Figura 7.17.	Momentos en un arco parabólico biarticulado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme	233
Figura 7.18.	Esfuerzo cortante en un arco parabólico biarticulado discretizado en diez elementos ante una carga vertical uniforme	233
Figura 7.19.	Axiles en un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme	234
Figura 7.20.	Momentos en un arco parabólico biarticulado ante una carga horizontal uniforme	234
Figura 7.21.	Cortante en un arco parabólico biarticulado ante una carga	

horizontal uniforme.....	234
Figura 7.22. Axiles en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.....	235
Figura 7.23. Cortante en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.....	235
Figura 7.24. Momentos en un arco parabólico biarticulado ante un incremento de temperatura.....	235
Figura 7.25. Análisis de pandeo no lineal en un arco circular biempotrado de 30 m de luz y 1/6 de rebajamiento	255
Figura 7.26. Análisis de pandeo no lineal en un arco circular biarticulado de 30 m de luz y 1/8 de rebajamiento	256
Figura 7.27. Análisis de pandeo no lineal en un arco parabólico biempotrado de 40 m de luz y 1/8 de rebajamiento	256
Figura 7.28. Análisis de pandeo no lineal en un arco parabólico biarticulado de 40 m de luz y 1/7 de rebajamiento	257

índice de tablas

Capítulo 2. Cálculo de arcos por el método de los desplazamientos

Tabla 2.1. Coeficientes de carga..... 44

Tabla 2.2. Coeficientes fijos..... 45

Capítulo 3. Cálculo de arcos por métodos energéticos

Tabla 3.1. Cálculo tabulado de arcos..... 74

Tabla 3.2. Significado del subíndice j y valor de \bar{M} 87

Tabla 3.3. Significado del subíndice k y valor de M 87

Tabla 3.4. Significado de d_{jk} 87

Tabla 3.5. Variación de inercia, sección y espesor en arcos parabólicos biempotrados de inercia reducida constante, para una sección rectangular y ancho constante..... 89

Capítulo 4. Estudio de arcos por el método de elementos finitos: Elementos de pórtico plano de Timoshenko

Tabla 4.1. Raíces de los polinomios de Legendre y pesos correspondientes..... 120

Tabla 4.2. Vigas de gran canto. Comparación de la integración reducida (un punto) e integración completa (dos puntos) para un elemento de viga lineal (Hughes, 2000)..... 127

Tabla 4.3. Vigas de canto normal. Comparación de la integración reducida (un punto) e integración completa (dos puntos) para un elemento de viga lineal (Hughes, 2000)..... 127

Capítulo 6. Pandeo de arcos

Tabla 6.1. Valores del coeficiente β en arcos biarticulados y triarticulados para distintos rebajamientos (Argüelles y col, 2000)..... 174

Capítulo 7. Aplicación informática y validación de los resultados

Tabla 7.1.	Coordenadas de los nodos tras la discretización de un arco parabólico de 30 m de luz, 5 m de flecha y apoyos a nivel en diez tramos.....	220
Tabla 7.2.	Arcos parabólicos biempotrados. Desplazamientos en la hipótesis de carga vertical uniforme	221
Tabla 7.3.	Arcos parabólicos biempotrados. Desplazamientos en la hipótesis de carga horizontal uniforme	221
Tabla 7.4.	Arcos parabólicos biempotrados. Desplazamientos en la hipótesis de carga térmica	222
Tabla 7.5.	Arcos parabólicos biempotrados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga vertical	223
Tabla 7.6.	Arcos parabólicos biempotrados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga horizontal	224
Tabla 7.7.	Arcos parabólicos biempotrados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga térmica	225
Tabla 7.8.	Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga vertical	226
Tabla 7.9.	Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga horizontal.....	226
Tabla 7.10.	Arcos parabólicos biempotrados. Reacciones en la hipótesis de carga térmica	226
Tabla 7.11.	Arcos parabólicos biarticulados. Desplazamientos en la hipótesis de carga vertical uniforme	231
Tabla 7.12.	Arcos parabólicos biarticulados. Desplazamientos en la hipótesis de carga horizontal uniforme	231
Tabla 7.13.	Arcos parabólicos biarticulados. Desplazamientos en la hipótesis de carga térmica	232
Tabla 7.14.	Arcos parabólicos biarticulados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga vertical	233
Tabla 7.15.	Arcos parabólicos biarticulados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga horizontal	234
Tabla 7.16.	Arcos parabólicos biarticulados. Esfuerzos en los elementos discretizados en la hipótesis de carga térmica	235
Tabla 7.17.	Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga vertical	236

Tabla 7.18.	Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga horizontal.....	236
Tabla 7.19.	Arcos parabólicos biarticulados. Reacciones en la hipótesis de carga térmica	236
Tabla 7.20.	Longitudes de arcos parabólicos (m)	241
Tabla 7.21.	Longitudes de arcos circulares (m).....	242
Tabla 7.22.	Angulo α que forman en el arranque los arcos parabólicos (rad)....	242
Tabla 7.23.	Angulo α que forman en el arranque los arcos circulares (rad)	242
Tabla 7.24.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biempotrados	243
Tabla 7.25.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biarticulados .	243
Tabla 7.26.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biempotrados.	244
Tabla 7.27.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biarticulados .	244
Tabla 7.28.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg) ...	245
Tabla 7.29.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg)....	245
Tabla 7.30.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg)	245
Tabla 7.31.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg)	246
Tabla 7.32.	Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg/m).....	246
Tabla 7.33.	Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg/m).....	247
Tabla 7.34.	Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg/m)	247
Tabla 7.35.	Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg/m)	247
Tabla 7.36.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biempotrados	249
Tabla 7.37.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos parabólicos biarticulados .	249
Tabla 7.38.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biempotrados ..	249
Tabla 7.39.	Coeficiente crítico de pandeo α_{cr} en arcos circulares biarticulados....	250
Tabla 7.40.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg) ...	250
Tabla 7.41.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg)....	251
Tabla 7.42.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg)	251
Tabla 7.43.	Esfuerzo axil crítico N_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg)	251
Tabla 7.44.	Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biempotrados (kg/m).....	252
Tabla 7.45.	Carga crítica q_{cr} en arcos parabólicos biarticulados (kg/m).....	252
Tabla 7.46.	Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biempotrados (kg/m)	252
Tabla 7.47.	Carga crítica q_{cr} en arcos circulares biarticulados (kg/m)	253

Tabla 7.48.	Comparación entre las directrices circular y parabólica en arcos de 30 m de luz y 5 m de flecha, discretizados en 10 tramos	258
Tabla 7.49.	Comparación entre las directrices circular y parabólica en arcos de 40 m de luz y 5 m de flecha, discretizados en 10 tramos	259
Tabla 7.50.	Coefficiente K_{cr} para la determinación de la Carga crítica q_{cr} en arcos simétricos	260