

### 3.8.7. Cálculo informático.

Para facilitar el cálculo de las matrices de rigidez ( $[K_0]$  y  $[K]$ ) de los pórticos biempotrados a dos aguas, se complementa el texto con un fichero en Excel, *Pórticos biempotrados a dos aguas simétricos*. La secuencia de las hojas de cálculo de este archivo va avanzando en la obtención de las distintas matrices hasta realizar el cálculo estático de la estructura y, posteriormente, la determinación del valor de la carga crítica de pandeo global del pórtico bajo la acción de las cargas aplicadas.

En la hoja *Kij barras* se introducen los datos necesarios para la obtención de las matrices de rigidez. Las casillas que hay que rellenar son:

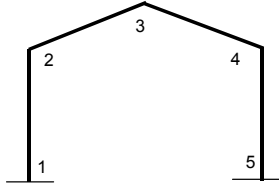
C3	Luz del pórtico, en m.
C4	Altura de pilares, en m.
C5	Pendiente de la cubierta, en tanto por uno.
C7	Descripción del pilar. Esta casilla tiene un carácter puramente informativo, pero conviene rellenarla para poder distinguir distintos cálculos que puedan realizarse.
C8	Descripción del dintel. Al igual que ocurre en el caso anterior, el contenido de la casilla es informativo.
D7	Momento de inercia de la sección transversal del pilar, en $\text{cm}^4$ .
D8	Momento de inercia de la sección transversal del dintel, en $\text{cm}^4$ .
E7	Área de la sección transversal del pilar, en $\text{cm}^2$ .
E8	Área de la sección transversal del dintel, en $\text{cm}^2$ .
D9	Módulo de elasticidad longitudinal del material, en $\text{kg/cm}^2$ .

Una vez introducidos los datos, la hoja de cálculo *Kij Barras* muestra las matrices de rigidez de las barras tanto en coordenadas locales como en coordenadas globales. En la hoja de cálculo *Ensamblaje* aparecen todas las submatrices de barra en coordenadas globales, y en la parte inferior las submatrices  $[K_{ij}]$  ensambladas. Y la hoja de cálculo *Matriz K0* recoge la matriz de rigidez completa del pórtico. En la zona central, coloreados en verde, se encuentran los elementos que componen la matriz de rigidez del pórtico  $[K]$ , que luego se muestra explícitamente en la hoja de cálculo *Matriz K*.

• **Kij Barras**

**Pórtico biempotrado a dos aguas simétrico**

<b>D A T O S</b>	Luz (m)	25.000		
	Altura pilares	5.000		
	Pendiente	10%		
			I (cm4)	A (cm2)
	Pilar	HEB-280	19270.00	131.00
	Dintel	IPE-450	33740.00	98.80
	E		2100000	
		Longitud (cm)	$\alpha$	
Barra 1-2		500	90	
Barra 2-3		1256.234453	5.710593137	
Barra 3-4		1256.234453	354.2894069	
Barra 4-5		500	270	



**BARRA 1-2**

K11	0	-1	0	550200	0	0			
	1	0	0	0	3884.832	971208			
	0	0	1	0	971208	323736000			
K12	0	-3884.832	-971208	0	1	0	3884.832	0	-971208
	550200	0	0	-1	0	0	0	550200	0
	0	971208	323736000	0	0	1	-971208	0	323736000
K21	0	-1	0	-550200	0	0			
	1	0	0	0	-3884.832	971208			
	0	0	1	0	-971208	161868000			
K22	0	3884.832	-971208	0	1	0	-3884.832	0	-971208
	-550200	0	0	-1	0	0	0	-550200	0
	0	-971208	161868000	0	0	1	971208	0	161868000

**BARRA 2-3**

K22	0.99503719	-0.09950372	0	165160.253	0	0			
	0.099503719	0.99503719	0	0	428.8777535	269385.505			
	0	0	1	0	269385.505	225607568.2			
K23	164340.5941	-42.6749314	-26804.85956	0.99503719	0.099503719	0	163529.2493	16310.03713	-26804.85956
	16434.05939	426.7493148	268048.5959	-0.09950372	0.99503719	0	16310.03713	2059.881465	268048.5959
	0	269385.505	225607568.2	0	0	1	-26804.8596	268048.5959	225607568.2
K32	0.99503719	-0.09950372	0	-165160.253	0	0			
	0.099503719	0.99503719	0	0	-428.877753	269385.505			
	0	0	1	0	-269385.505	112803784.1			
K33	-164340.5941	42.67493143	-26804.85956	0.99503719	0.099503719	0	-163529.249	-16310.0371	-26804.85956
	-16434.05939	-426.749315	268048.5959	-0.09950372	0.99503719	0	-16310.0371	-2059.88146	268048.5959
	0	-269385.505	112803784.1	0	0	1	26804.85956	-268048.596	112803784.1

**BARRA 3-4**

K33	0.99503719	0.099503726	0	165160.253	0	0			
	-0.099503726	0.99503719	0	0	428.8777535	269385.505			
	0	0	1	0	269385.505	225607568.2			
	164340.5939	42.67493449	26804.86149	0.99503719	-0.09950373	0	163529.249	-16310.0383	26804.86149
	-16434.06057	426.7493145	268048.5957	0.099503726	0.99503719	0	-16310.0383	2059.881699	268048.5957
	0	269385.505	225607568.2	0	0	1	26804.86149	268048.5957	225607568.2
K34	0.99503719	0.099503726	0	-165160.253	0	0			
	-0.099503726	0.99503719	0	0	-428.877753	269385.505			
	0	0	1	0	-269385.505	112803784.1			
	-164340.5939	-42.6749345	26804.86149	0.99503719	-0.09950373	0	-163529.249	16310.03829	26804.86149
	16434.06057	-426.749314	268048.5957	0.099503726	0.99503719	0	16310.03829	-2059.8817	268048.5957
	0	-269385.505	112803784.1	0	0	1	-26804.8615	-268048.596	112803784.1
K43	0.99503719	0.099503726	0	-165160.253	0	0			
	-0.099503726	0.99503719	0	0	-428.877753	-269385.505			
	0	0	1	0	269385.505	112803784.1			
	-164340.5939	-42.6749345	-26804.86149	0.99503719	-0.09950373	0	-163529.249	16310.03829	-26804.86149
	16434.06057	-426.749314	-268048.5957	0.099503726	0.99503719	0	16310.03829	-2059.8817	-268048.5957
	0	269385.505	112803784.1	0	0	1	26804.86149	268048.5957	112803784.1
K44	0.99503719	0.099503726	0	165160.253	0	0			
	-0.099503726	0.99503719	0	0	428.8777535	-269385.505			
	0	0	1	0	-269385.505	225607568.2			
	164340.5939	42.67493449	-26804.86149	0.99503719	-0.09950373	0	163529.249	-16310.0383	-26804.86149
	-16434.06057	426.7493145	-268048.5957	0.099503726	0.99503719	0	-16310.0383	2059.881699	-268048.5957
	0	-269385.505	225607568.2	0	0	1	-26804.8615	-268048.596	225607568.2

**BARRA 4-5**

K44	0	1	0	550200	0	0			
	-1	0	0	0	3884.832	971208			
	0	0	1	0	971208	323736000			
	0	3884.832	971208	0	-1	0	3884.832	0	971208
	-550200	0	0	1	0	0	0	550200	0
	0	971208	323736000	0	0	1	971208	0	323736000
K45	0	1	0	-550200	0	0			
	-1	0	0	0	-3884.832	971208			
	0	0	1	0	-971208	161868000			
	0	-3884.832	971208	0	-1	0	-3884.832	0	971208
	550200	0	0	1	0	0	0	-550200	0
	0	-971208	161868000	0	0	1	-971208	0	161868000
K54	0	1	0	-550200	0	0			
	-1	0	0	0	-3884.832	-971208			
	0	0	1	0	971208	161868000			
	0	-3884.832	-971208	0	-1	0	-3884.832	0	-971208
	550200	0	0	1	0	0	0	-550200	0
	0	971208	161868000	0	0	1	971208	0	161868000
K55	0	1	0	550200	0	0			
	-1	0	0	0	3884.832	-971208			
	0	0	1	0	-971208	323736000			
	0	3884.832	-971208	0	-1	0	3884.832	0	-971208
	-550200	0	0	1	0	0	0	550200	0
	0	-971208	323736000	0	0	1	-971208	0	323736000



4			5			
0	0	0	0	0	0	1
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	2
0	0	0	0	0	0	
0	0	0	0	0	0	
-163529.249	16310.03829	26804.86149	0	0	0	3
16310.03829	-2059.8817	268048.5957	0	0	0	
-26804.8615	-268048.596	112803784.1	0	0	0	
167414.081	-16310.0383	944403.1385	-3884.832	0	971208	4
-16310.0383	552259.8817	-268048.5957	0	-550200	0	
944403.1385	-268048.596	549343568.2	-971208	0	161868000	
-3884.832	0	-971208	3884.832	0	-971208	5
0	-550200	0	0	550200	0	
971208	0	161868000	-971208	0	323736000	
4			5			

### 3.9. Desplazamientos, solicitaciones y reacciones.

#### 3.9.1. Desplazamientos de los nudos.

Los desplazamientos de los nudos libres se obtienen resolviendo el sistema de ecuaciones [16], que constituye la ecuación matricial del pórtico:

$$\{P_a\}_G = [K] \cdot \{d_1\}_G$$

Aplicando cálculo matricial, de la expresión anterior se puede despejar el vector de los desplazamientos de los nudos libres.

$$\{d_1\}_G = [K]^{-1} \cdot \{P_a\}_G \quad [17]$$

En consecuencia, la matriz de rigidez [K] del pórtico determina los desplazamientos de los nudos libres en coordenadas globales en función de las cargas aplicadas directamente sobre los nudos, referidas también a coordenadas globales.

#### 3.9.2. Solicitaciones de extremo.

La ecuación [6]

$$\begin{Bmatrix} \{S_{12}\} \\ \{S_{21}\} \end{Bmatrix}_L = \begin{pmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{pmatrix}_L \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \end{Bmatrix}_L$$

relaciona las solicitaciones en los extremos de la barra 1-2 con los desplazamientos de sus extremos,  $\{d_1\}_L$  y  $\{d_2\}_L$  en coordenadas locales. Como en la expresión [17] los desplazamientos aparecen en coordenadas globales, se va a pasar, mediante [9], los vectores de desplazamiento de coordenadas locales a coordenadas globales.

Así,  $\{d_1\}_L = [R]^T \cdot \{d_1\}_G$  y  $\{d_2\}_L = [R]^T \cdot \{d_2\}_G$ , por lo que la expresión anterior se puede escribir

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_L &= [K_{11}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_1\}_G + [K_{12}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_L &= [K_{21}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_1\}_G + [K_{22}]_L \cdot [R]^T \cdot \{d_2\}_G \end{aligned}$$

Si, genéricamente, hacemos

$$[C_j] = [K_{ij}]_L \cdot [R]^T \quad [18]$$

Las expresiones anteriores se transforman en

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_L &= [C_{11}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{12}] \cdot \{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_L &= [C_{21}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{22}] \cdot \{d_2\}_G \end{aligned}$$

y de forma matricial

$$\begin{Bmatrix} \{S_{12}\} \\ \{S_{21}\} \end{Bmatrix}_L = \begin{pmatrix} [C_{11}] & [C_{12}] \\ [C_{21}] & [C_{22}] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{d_2\} \end{Bmatrix}_G \quad [19]$$

Los valores de la submatrices de conversión  $[C_{ij}]$  son:

$$[C_{11}] = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos\alpha & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen}\alpha & 0 \\ -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen}\alpha & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos\alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen}\alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos\alpha & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

$$[C_{12}] = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen} \alpha & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos \alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos \alpha & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

$$[C_{21}] = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen} \alpha & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos \alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos \alpha & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

$$[C_{22}] = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha & \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha & \frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen} \alpha & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos \alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos \alpha & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix}$$

Estas expresiones, sustituidas en [19] dan lugar a la ecuación matricial:

$$\begin{Bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \\ N_{21} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix}_L = \begin{pmatrix} \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha & \frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen} \alpha & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen} \alpha & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos \alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen} \alpha & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos \alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos \alpha & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos \alpha & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} \\ -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha & -\frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen} \alpha & 0 & \frac{E \cdot A}{L} \cdot \cos \alpha & \frac{E \cdot A}{L} \cdot \operatorname{sen} \alpha & 0 \\ \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen} \alpha & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos \alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \operatorname{sen} \alpha & \frac{12 \cdot E \cdot I}{L^3} \cdot \cos \alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \\ -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos \alpha & \frac{2 \cdot E \cdot I}{L} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \operatorname{sen} \alpha & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{L^2} \cdot \cos \alpha & \frac{4 \cdot E \cdot I}{L} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{1x} \\ \delta_{1y} \\ \theta_1 \\ \delta_{2x} \\ \delta_{2y} \\ \theta_2 \end{Bmatrix}_G$$

y en forma reducida

$$\{S\}_L = [C] \cdot \{d_1\}_G \quad [20]$$

La matriz de conversión [C] determina las solicitaciones de extremo en coordenadas locales en función de los desplazamientos de los nudos referidos a coordenadas globales. Si quisiéramos calcular las solicitaciones de extremo en coordenadas locales en función de las cargas aplicadas sobre los nudos referidas a coordenadas globales,

$$\{S\}_L = [C] \cdot [K]^{-1} \cdot \{P_a\}_G$$

Definiendo la matriz de conversión [D] con  $[D] = [C] \cdot [K]^{-1}$ , la ecuación [20] se convierte en

$$\{S\}_L = [D] \cdot \{P_a\}_G$$

Las matrices de conversión [C] y [D] dependen únicamente de la forma, los enlaces y el material, y por ello son matrices características de la estructura.

### 3.9.3. Reacciones externas.

Recordando la ecuación matricial [15],

$$\begin{Bmatrix} \{P_a\} \\ \{R\} \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} [K] & [K_{II}] \\ [K_I] & [K_{III}] \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \{d_1\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}_G$$

de donde

$$\{R\}_G = [K_I] \cdot \{d_1\}_G \quad [21]$$

De esta expresión se deduce que el vector de reacciones externas  $\{R\}_G$  en coordenadas globales es función del vector de desplazamientos de los nudos libres, también en coordenadas globales.

La matriz de proporcionalidad  $[K_I]$  viene definida por

$$[K_I] = \begin{pmatrix} [K_{12}]_G & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{54}]_G \end{pmatrix} \quad [22]$$

Si en lugar de expresar las reacciones en función de los desplazamientos se desea hacerlo en función del vector de cargas aplicadas, basta recurrir a la ecuación [17], y con ello se puede escribir:

$$\{R\}_G = [K_I] \cdot [K]^{-1} \cdot \{P_a\}_G$$



## 4. Desarrollo del método de los desplazamientos.

En la figura 21 se muestra un pórtico biempotrado a dos aguas sometido a una serie de cargas que actúan sobre algunos nudos y barras.

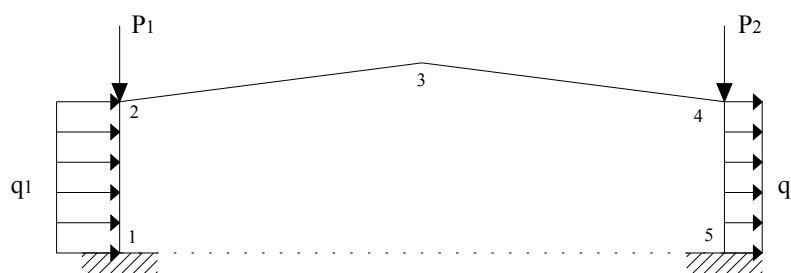


Figura 21: Situación real de cargas.

El método de los desplazamientos, basándose en el principio de superposición, equipara el estado real de carga de una estructura a la suma de los dos estados de carga siguientes:

- **Estado de carga 1**

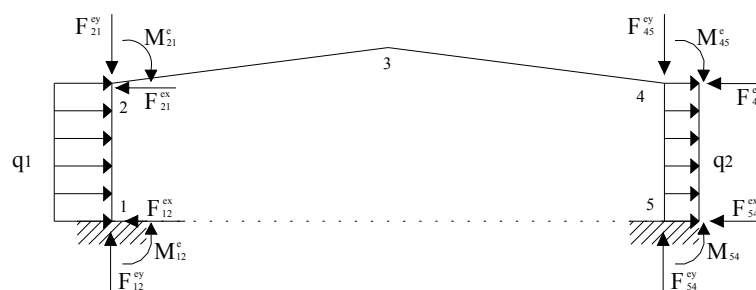


Figura 22: Cargas y reacciones de empotramiento.

Considera que los nudos no giran ni se trasladan. En este caso las barras cargadas se suponen empotradas en sus extremos y, por tanto, sometidas a las cargas y a las reacciones de los empotramientos supuestos (figura 22).

De esta manera se determinan las sollicitaciones de las barras, siendo nulos los desplazamientos en este estado de carga 1.

- **Estado de carga 2**

Considera las cargas inicialmente aplicadas sobre los nudos, a las que hay que añadir las acciones de empotramiento  $-F^e$  y  $-M^e$ , iguales y de sentido contrario a las reacciones de empotramiento calculadas en el estado de carga 1 (figura 23).

Superponiendo ambos estados de carga se obtiene el sistema de cargas  $P_i^a$  que originan los desplazamientos de los nudos (figura 24).

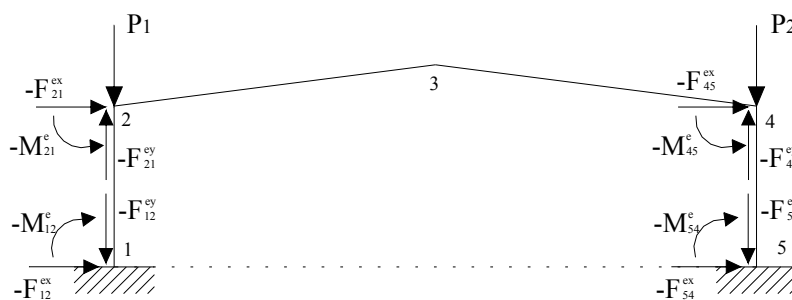


Figura 23: Cargas sobre los nudos y acciones de empotramiento.

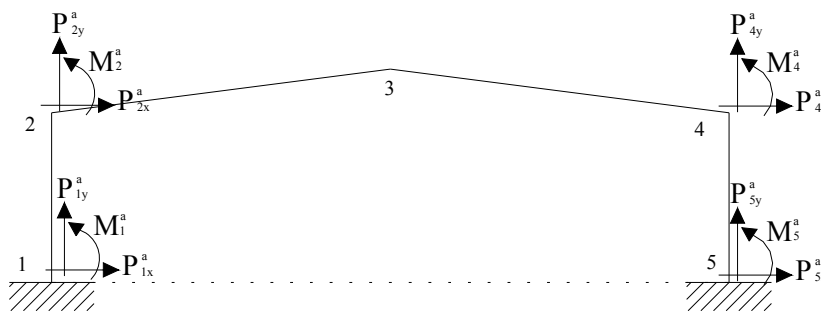


Figura 24: Reacciones de empotramiento.

#### 4.1. Desplazamientos y solicitaciones.

Los desplazamientos de los nudos y las solicitaciones en los extremos de las barras en el estado de carga real se obtienen sumando las correspondientes a los estados de carga 1 y 2.

##### 4.1.1. Estado de carga 1.

En este estado de carga los desplazamientos de los nudos son nulos, pues se parte de la hipótesis de que tienen impedido el giro y el desplazamiento longitudinal y transversal.

Al considerar las barras empotradas en sus extremos se calculan las reacciones de empotramiento de todas las barras cargadas. Estas reacciones en una barra cargada 1-2, referidas a las coordenadas locales de la barra, se representan por los vectores

$$\{R_{12}^e\}_L = \begin{Bmatrix} N_{12}^e \\ T_{12}^e \\ M_{12}^e \end{Bmatrix}_L \quad \text{y} \quad \{R_{21}^e\}_L = \begin{Bmatrix} N_{21}^e \\ T_{21}^e \\ M_{21}^e \end{Bmatrix}_L$$

Las reacciones de empotramiento constituyen las únicas sollicitaciones de extremo del estado de carga 1.

#### 4.1.2. Estado de carga 2.

Premultiplicando los anteriores vectores de reacciones de empotramiento por la matriz de rotación [R] se obtienen los vectores de reacciones de empotramiento en coordenadas globales.

$$\{R_{12}^e\}_G = \begin{Bmatrix} F_{12}^{ex} \\ F_{12}^{ey} \\ M_{12}^e \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{12}^e \\ T_{12}^e \\ M_{12}^e \end{Bmatrix}_L$$

$$\{R_{21}^e\}_G = \begin{Bmatrix} F_{21}^{ex} \\ F_{21}^{ey} \\ M_{21}^e \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha & 0 \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} N_{21}^e \\ T_{21}^e \\ M_{21}^e \end{Bmatrix}_L$$

Si en un nudo  $j$  del pórtico concurren dos barras cargadas  $ij$ ,  $ik$ , la reacción que ejerce el nudo  $j$  sobre esas barras es:

$$\{R_j^e\}_G = \{R_{ij}^e\}_G + \{R_{jk}^e\}_G$$

En el estado de carga 2, las cargas que actúan sobre los nudos libres  $\{P_a\}_G$  son la suma de las cargas directamente aplicadas en los nudos  $\{P_{ad}\}_G$  y de las acciones de empotramiento  $\{A^e\}_G$ , es decir:

$$\{P_a\}_G = \{P_{ad}\}_G + \{A^e\}_G$$

o sea

$$\{P_a\}_G = \{P_{ad}\}_G - \{R^e\}_G$$

Para este estado de carga, la ecuación matricial del pórtico es:

$$\{P_a\}_G = \{P_{ad}\}_G + \{A^e\}_G = \{P_{ad}\}_G - \{R^e\}_G = [K] \cdot \{d_1\}_G$$

siendo  $[K]$  la matriz de rigidez del pórtico estudiada en el apartado (3.7). De esta ecuación matricial se deducen los desplazamientos de los nudos en el estado de carga real.

Las solicitaciones de extremo en este estado de carga son:

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_L &= [C_{11}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{12}] \cdot \{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_L &= [C_{21}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{22}] \cdot \{d_2\}_G \end{aligned}$$

siendo, como ya se ha visto en [18],  $[C_{ij}] = [K_{ij}] \cdot [R]^T$ .

#### 4.1.3. Estado de carga real.

Al ser nulos los desplazamientos de los nudos en el estado de carga 1, los desplazamientos  $\{d_1\}_G$  hallados en el estado de carga 2 son los desplazamientos de los nudos en el estado de carga real.

Asimismo, sumando las solicitaciones de extremo correspondientes a los estados de carga 1 y 2 se obtienen las solicitaciones de extremo en el estado de carga real.

$$\begin{aligned} \{S_{12}\}_L &= \{R^e\}_L + [C_{11}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{12}] \cdot \{d_2\}_G \\ \{S_{21}\}_L &= \{R^e\}_L + [C_{21}] \cdot \{d_1\}_G + [C_{22}] \cdot \{d_2\}_G \end{aligned}$$

o más brevemente

$$\{S\}_L = \{R^e\}_L + [C] \cdot \{d\}_G \quad [23]$$

#### 4.2. Ejemplo de aplicación.

Continuando con el pórtico descrito en el apartado (3.8), se van a calcular las cargas y, posteriormente, seguir con el cálculo matricial, obteniendo los desplazamientos y las solicitaciones de las barras.

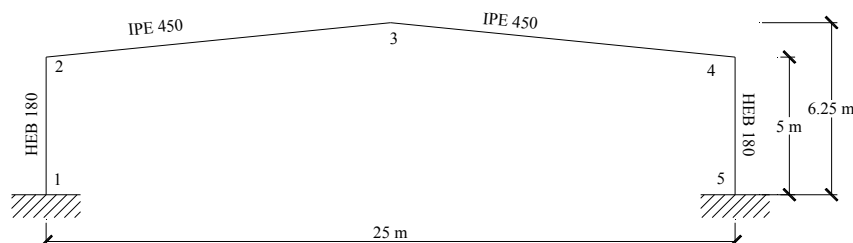


Figura 25: Geometría del pórtico ejemplo.

La estructura estará ubicada en Ciudad Real, capital manchega situada en la meseta sur a 640 m de altitud. El material de cubierta que se emplea es chapa galvanizada, con un peso de  $10 \text{ kg/m}^2$ , y como correas, perfiles Z conformados en frío, de canto 180 mm y 2 mm de espesor, separadas cada 2 m.

Como se avanzó en el epígrafe (3.8), el predimensionamiento se ha realizado con los perfiles siguientes:

	Perfil	Peso (kp/m)
Pilar	HEB 280	103.0
Dintel	IPE 450	77.6

#### 4.2.1. Obtención de las cargas.

- Peso propio

Correas	2.479 kg/m <sup>2</sup>	
Cubierta	10 kg/m <sup>2</sup>	
	<u>12.479 kg/m<sup>2</sup></u>	$12.479 \cdot 5 = 62.395 \text{ kg/m}$
Dintel		<u>77.6 kg/m</u>
		139.995 kg/m

Con una carácter conservador, y para manejar cargas aplicadas directamente sobre los nudos, se suponen aplicadas en los nudos 2 y 4 unas cargas puntuales de 515 kg, que representan el peso de cada soporte ( $103 \cdot 5$  kg).

- Viento

Ciudad Real se encuentra en la zona eólica X. Si se considera que desde el punto de vista de la exposición de la estructura al viento, la exposición es normal, si se determina que la estructura dispondrá de un porcentaje de huecos inferior al 33% y recordando las características geométricas del pórtico (altura de pilares 5 m, altura de clave 6.25 m y ángulo de inclinación de cubierta  $\alpha = \arctg 0.10 = 5.71^\circ$ ), en la NTE ECV-76 se obtienen los valores de presión (o succión) del viento en las distintas partes de la estructura. Así:

HIPOTESIS A		m		
		H1	H	H2
		6	6.25	14
$\alpha_1$	0	-13	-13.09	-16
$\alpha$	5.71	-5.58	-5.616	-6.86
$\alpha_2$	10	0	0	0
n		-13	-13.094	-16

HIPOTESIS B		m		
		H1	H	H2
		6	6.25	14
$\alpha_1$	0	-51	-51.38	-63
$\alpha$	5.71	-43.58	-43.898	-53.86
$\alpha_2$	10	-38	-38.28125	-47
n		-51	-51.375	-63

Figura 26: Carga de viento sobre cubiertas en el pórtico ejemplo.

Como se muestra en la figura 26, es necesario interpolar entre los valores que aparecen en la Norma.

De este modo, las cargas de viento perpendiculares a las dos vertientes de la cubierta, son:

Tabla 4.	
Carga de viento sobre cubiertas.	
m (kg/m <sup>2</sup> )	n (kg/m <sup>2</sup> )

Hipótesis A	-5.616	-13.094
Hipótesis B	-43.898	-51.375

El signo (-) indica que las cargas son de succión. Estos valores, al tener en cuenta la separación de 5 m entre pórticos, se transforman en:

Tabla 5.  
Carga uniforme de viento sobre cubierta.

	m (kg/m)	n (kg/m)
Hipótesis A	-28.08	-65.47
Hipótesis B	-219.49	-256.875

De igual modo, la Norma nos proporciona los valores de presión y succión del viento a barlovento y sotavento de la edificación. También será necesario realizar la interpolación que se muestra en la figura 27.

	H1	H	H2
	3	5.00	6
q	60	64.667	67

<b>barlovento</b>	43.111	kp/m <sup>2</sup>
<b>sotavento</b>	21.556	kp/m <sup>2</sup>

Figura 27: Carga total de viento sobre edificios.

Al igual que se ha operado con las cargas de viento que actúan sobre la cubierta, al tener en cuenta la separación de 5 m entre pórticos, estos valores se transforman en:

Tabla 6.  
Carga lateral de viento.

	q (kg/m)
Barlovento	215.555
Sotavento	107.780

- Nieve

Para poblaciones que se encuentran entre 601 y 800 m de altitud sobre el nivel del mar, la sobrecarga de nieve en proyección horizontal según la NBE AE-88 es de  $80 \text{ kg/m}^2$ , valor que se puede reducir multiplicando por el coseno del ángulo que forma la cubierta al tener una inclinación inferior a  $60^\circ$ .

Además, multiplicando por la separación entre pórticos se obtiene el valor de la sobrecarga de nieve

$$q = 80 \cdot \cos 5.71 \cdot 5 = 398.015 \text{ kg/m}$$

Teniendo en cuenta que las cargas de viento sobre cubierta son cargas de succión (esto sucede siempre que la pendiente sea inferior al 17.64% en la zona eólica X y para la altura de cumbrera del pórtico ejemplo), la combinación de acciones más desfavorable corresponde a la situación de peso propio más nieve, que será la hipótesis de carga que se desarrolla a continuación, y que se representa en la figura 28, ya con las cargas en unidades de kg y cm.

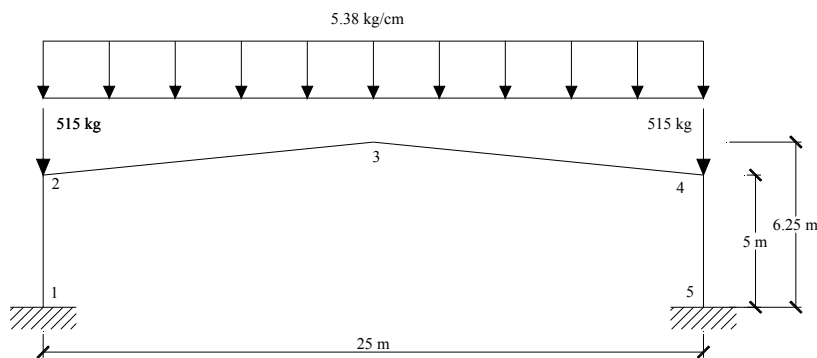


Figura 28: Combinación de acciones más desfavorable en el pórtico ejemplo.

#### 4.2.2. Desplazamiento de los nudos.

##### a) Estado de carga 1

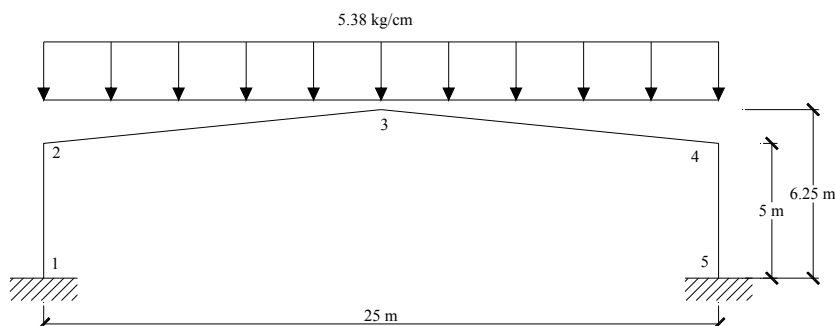




Figura 29: Cargas aplicadas sobre las barras en el pórtico ejemplo.

En la figura 29 se representa el estado de carga 1, en el que no aparecen las cargas que están directamente aplicadas sobre los nudos.

En este estado de carga consideramos las barras empotradas en sus extremos.

- **Barra 2-3**

En la figura 30 se muestra la descomposición de la carga vertical (peso propio + nieve) según los ejes locales de la barra.

Sus valores son:

$$q_y = q \cdot \cos^2 \alpha = 5.38 \cdot \cos^2 5.71 = 5.327 \text{ kg/cm}$$

$$q_x = q \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha = 5.38 \cdot \cos 5.71 \cdot \text{sen} 5.71 = 0.533 \text{ kg/cm}$$

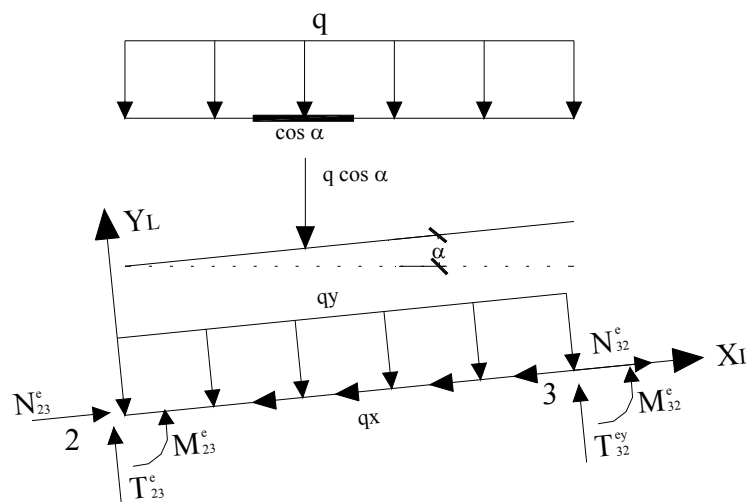


Figura 30: Descomposición de cargas.

Las reacciones de empotramiento son

$$N_{23}^e = \frac{q_x \cdot L}{2} = \frac{0.533 \cdot 1256.234}{2} = 334.786 \text{ kg}$$

$$T_{23}^e = \frac{q_y \cdot L}{2} = \frac{5.327 \cdot 1256.234}{2} = 3345.979 \text{ kg}$$

$$M_{23}^e = \frac{q_y \cdot L^2}{12} = \frac{5.327 \cdot 1256.234^2}{12} = 700555.485 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

$$N_{32}^e = \frac{q_x \cdot L}{2} = \frac{0.533 \cdot 1256.234}{2} = 334.786 \text{ kg}$$

$$T_{32}^e = \frac{q_y \cdot L}{2} = \frac{5.327 \cdot 1256.234}{2} = 3345.979 \text{ kg}$$

$$M_{32}^e = -\frac{q_y \cdot L^2}{12} = \frac{5.327 \cdot 1256.234^2}{12} = -700555.485 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Por consiguiente, las reacciones de empotramiento en coordenadas locales son:

$$\{R_{23}^e\}_L = \begin{Bmatrix} 334.786 \\ 3345.979 \\ 700555.485 \end{Bmatrix}_L \quad \text{y} \quad \{R_{32}^e\}_L = \begin{Bmatrix} 334.786 \\ 3345.979 \\ -700555.485 \end{Bmatrix}_L$$

- **Barra 3-4**

Las cargas descompuestas según los ejes locales valen:

$$q_y = q \cdot \cos^2 \alpha = 5.38 \cdot \cos^2 354.29 = 5.327 \text{ kg/cm}$$

$$q_x = q \cdot \cos \alpha \cdot \text{sen} \alpha = 5.38 \cdot \cos 354.29 \cdot \text{sen} 354.29 = -0.533 \text{ kg/cm}$$

Las reacciones de empotramiento son

$$N_{34}^e = \frac{q_x \cdot L}{2} = \frac{-0.533 \cdot 1256.234}{2} = -334.786 \text{ kg}$$

$$T_{34}^e = \frac{q_y \cdot L}{2} = \frac{5.327 \cdot 1256.234}{2} = 3345.979 \text{ kg}$$

$$M_{34}^e = \frac{q_y \cdot L^2}{12} = \frac{5.327 \cdot 1256.234^2}{12} = 700555.485 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$
  

$$N_{43}^e = \frac{q_x \cdot L}{2} = \frac{-0.533 \cdot 1256.234}{2} = -334.786 \text{ kg}$$

$$T_{43}^e = \frac{q_y \cdot L}{2} = \frac{5.327 \cdot 1256.234}{2} = 3345.979 \text{ kg}$$

$$M_{43}^e = -\frac{q_y \cdot L^2}{12} = -\frac{5.327 \cdot 1256.234^2}{12} = -700555.485 \text{ kg} \cdot \text{cm}$$

Por tanto, las reacciones de empotramiento en coordenadas locales son:

$$\{R_{34}^e\}_L = \begin{Bmatrix} -334.786 \\ 3345.979 \\ 700555.485 \end{Bmatrix}_L \quad \text{y} \quad \{R_{43}^e\}_L = \begin{Bmatrix} -334.786 \\ 3345.979 \\ -700555.485 \end{Bmatrix}_L$$

### b) Estado de carga 2

Premultiplicando los anteriores vectores de reacciones de empotramiento por sus correspondientes matrices de rotación [R] se obtienen los vectores de reacciones de empotramiento en coordenadas globales.

$$\{R_{23}^e\}_G = \begin{Bmatrix} F_{23}^{ex} \\ F_{23}^{ey} \\ M_{23}^e \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} 0.99503719 & -0.099503719 & 0 \\ 0.099503719 & 0.99503719 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 334.786 \\ 3345.979 \\ 700555.485 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3362.697 \\ 700555.485 \end{Bmatrix}_G$$

$$\{R_{32}^e\}_G = \begin{Bmatrix} F_{32}^{ex} \\ F_{32}^{ey} \\ M_{32}^e \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} 0.99503719 & -0.099503719 & 0 \\ 0.099503719 & 0.99503719 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 334.786 \\ 3345.979 \\ -700555.485 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3362.697 \\ -700555.485 \end{Bmatrix}_G$$

$$\{R_{34}^e\}_G = \begin{Bmatrix} F_{34}^{ex} \\ F_{34}^{ey} \\ M_{34}^e \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} 0.99503719 & 0.099503719 & 0 \\ -0.099503719 & 0.99503719 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -334.786 \\ 3345.979 \\ 700555.485 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3362.697 \\ 700555.485 \end{Bmatrix}_G$$

$$\{R_{43}^e\}_G = \begin{Bmatrix} F_{43}^{ex} \\ F_{43}^{ey} \\ M_{43}^e \end{Bmatrix}_G = \begin{pmatrix} 0.99503719 & 0.099503719 & 0 \\ -0.099503719 & 0.99503719 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -334.786 \\ 3345.979 \\ -700555.485 \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 3362.697 \\ -700555.485 \end{Bmatrix}_G$$

Las cargas directamente aplicadas sobre los nudos 2 y 4, correspondientes al peso propio del pilar, en coordenadas locales, son:

$$\{P_{2d}\}_L = \begin{Bmatrix} -515 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_L \quad \text{y} \quad \{P_{4d}\}_L = \begin{Bmatrix} 515 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_L$$

En coordenadas globales, los vectores son

$$\{P_{2d}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -515 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} 0 \\ -515 \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

$$\{P_{ad}\}_G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 515 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -515 \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

En este estado de carga, las cargas que actúan sobre los nudos libres  $\{P_a\}_G$  son la suma de las cargas directamente aplicadas en los nudos  $\{P_{ad}\}_G$  y de las acciones de empotramiento  $\{A^e\}_G$ , es decir:

$$\{P_a\}_G = \{P_{ad}\}_G + \{A^e\}_G$$

o lo que es lo mismo

$$\{P_a\}_G = \{P_{ad}\}_G - \{R^e\}_G$$

Concretando,

$$\{P_2\}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ -515 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 3362.697 \\ 700555.485 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3877.697 \\ -700555.485 \end{Bmatrix}_G$$

$$\{P_3\}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 3362.697 \\ -700555.485 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 3362.697 \\ 700555.485 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -6725.394 \\ 0 \end{Bmatrix}_G$$

$$\{P_4\}_G = \begin{Bmatrix} 0 \\ -515 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 3362.697 \\ -700555.485 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -3877.697 \\ 700555.485 \end{Bmatrix}_G$$

Para este estado de carga, la ecuación matricial del pórtico es:

$$\{P_a\}_G = [K] \cdot \{d_1\}_G$$

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ -3877.697 \\ -700555.485 \\ 0 \\ -6725.394 \\ 0 \\ 0 \\ -3877.697 \\ 700555.485 \end{Bmatrix}_G = [K] \cdot \begin{Bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \\ \delta_{x4} \\ \delta_{y4} \\ \theta_4 \end{Bmatrix}_G$$

siendo  $[K]$  la matriz de rigidez del pórtico calculada en el apartado (3.8.6).

De esta ecuación matricial se deducen los desplazamientos de los nudos en el estado de carga real, que son:

$$\begin{Bmatrix} \delta_{x2} \\ \delta_{y2} \\ \theta_2 \\ \delta_{x3} \\ \delta_{y3} \\ \theta_3 \\ \delta_{x4} \\ \delta_{y4} \\ \theta_4 \end{Bmatrix}_G = \begin{Bmatrix} -0.8217 \text{ cm} \\ -0.0132 \text{ cm} \\ -0.0041 \text{ rad} \\ 0.0000 \text{ cm} \\ -8.6845 \text{ cm} \\ 0.0000 \text{ rad} \\ 0.8217 \text{ cm} \\ -0.0132 \text{ cm} \\ 0.0041 \text{ rad} \end{Bmatrix}_G$$

#### 4.2.3. Solicitaciones de extremo.

Las solicitaciones de extremo en el estado de carga real vienen dadas por la expresión [23]:

$$\{S\}_L = \{R^e\}_L + [C] \cdot \{d\}_G$$

- **Barra 1-2**

Calculamos en primer lugar las matrices de conversión  $[C_{ij}]$ , que vienen definidas por  $[C_{ij}] = [K_{ij}] \cdot [R]^T$ :

$$[C_{11}]_L = \begin{pmatrix} 550200 & 0 & 0 \\ 0 & 3884.83 & 971208 \\ 0 & 971208 & 323736000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & 971208 \\ -971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix}$$

$$[C_{12}]_L = \begin{pmatrix} -550200 & 0 & 0 \\ 0 & -3884.83 & 971208 \\ 0 & -971208 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -550200 & 0 \\ 3884.83 & 0 & 971208 \\ 971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[C_{21}]_L = \begin{pmatrix} -550200 & 0 & 0 \\ 0 & -3884.83 & -971208 \\ 0 & 971208 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -550200 & 0 \\ 3884.83 & 0 & -971208 \\ -971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[C_{22}]_L = \begin{pmatrix} 550200 & 0 & 0 \\ 0 & 3884.83 & -971208 \\ 0 & -971208 & 323736000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & -971208 \\ 971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix}$$

$$\{S_{12}\}_L = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & 971208 \\ -971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -550200 & 0 \\ 3884.83 & 0 & 971208 \\ 971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.8217 \\ -0.0132 \\ -0.0041 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{21}\}_L = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -550200 & 0 \\ 3884.83 & 0 & -971208 \\ -971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & -971208 \\ 971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.8217 \\ -0.0132 \\ -0.0041 \end{Bmatrix}$$

En resumen, las solicitaciones de extremo en la barra 1-2, en kg y kg·cm, son:

$$\{S_{12}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{12} \\ T_{12} \\ M_{12} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} 7240 \\ -7168 \\ -1460594 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{21}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{21} \\ T_{21} \\ M_{21} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} -7240 \\ 7168 \\ -2123201 \end{Bmatrix}$$

- **Barra 2-3**

$$[R]^T = \begin{pmatrix} 0.99503719 & 0.099503719 & 0 \\ -0.099503719 & 0.99503719 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[C_{22}] = \begin{pmatrix} 165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & 428.88 & 269385.51 \\ 0 & 269385.51 & 2256075682 \end{pmatrix} \cdot [R]^T = \begin{pmatrix} 164340.59 & 16434.06 & 0 \\ -42.67 & 426.75 & 269385.51 \\ -26804.84 & 268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

$$[C_{23}] = \begin{pmatrix} -165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & -428.88 & 269385.51 \\ 0 & -269385.51 & 1128037841 \end{pmatrix} \cdot [R]^T = \begin{pmatrix} -164340.59 & -16434.06 & 0 \\ 42.67 & -426.75 & 269385.51 \\ 26804.84 & -268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[C_{32}] = \begin{pmatrix} -165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & -428.88 & -269385.51 \\ 0 & 269385.51 & 1128037841 \end{pmatrix} \cdot [R]^T = \begin{pmatrix} -164340.59 & -16434.06 & 0 \\ 42.67 & -426.75 & -269385.51 \\ -26804.84 & 268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[C_{33}] = \begin{pmatrix} 165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & 428.88 & -269385.51 \\ 0 & -269385.51 & 2256075682 \end{pmatrix} \cdot [R]^T = \begin{pmatrix} 164340.59 & 16434.06 & 0 \\ -42.67 & 426.75 & -269385.51 \\ 26804.84 & -268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

$$\{S_{23}\}_L = \begin{Bmatrix} 334.786 \\ 3345.979 \\ 700555.485 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 164340.59 & 16434.06 & 0 \\ -42.67 & 426.75 & 269385.51 \\ -26804.84 & 268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.8217 \\ -0.0132 \\ -0.0041 \end{Bmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} -164340.59 & -16434.06 & 0 \\ 42.67 & -426.75 & 269385.51 \\ 26804.84 & -268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -8.6845 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{32}\}_L = \begin{Bmatrix} 334.786 \\ 3345.979 \\ -700555.485 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} -164340.59 & -16434.06 & 0 \\ 42.67 & -426.75 & -269385.51 \\ -26804.84 & 268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.8217 \\ -0.0132 \\ -0.0041 \end{Bmatrix} + \\ + \begin{pmatrix} 164340.59 & 16434.06 & 0 \\ -42.67 & 426.75 & -269385.51 \\ 26804.84 & -268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -8.6845 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En resumen, las solicitaciones de extremo en la barra 2-3 son:

$$\{S_{23}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{23} \\ T_{23} \\ M_{23} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} 7801 \\ 5978 \\ 2123201 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{32}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{32} \\ T_{32} \\ M_{32} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} -7132 \\ 713 \\ 1183936 \end{Bmatrix}$$



- **Barra 3-4**

$$[R]^T = \begin{pmatrix} 0.99503719 & -0.099503719 & 0 \\ 0.099503719 & 0.99503719 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$[C_{33}] = \begin{pmatrix} 165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & 428.88 & 269385.51 \\ 0 & 269385.51 & 2256075682 \end{pmatrix} \cdot [R]^T = \begin{pmatrix} 164340.59 & -16434.06 & 0 \\ 42.67 & 426.75 & 269385.51 \\ 26804.84 & 268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

$$[C_{34}] = \begin{pmatrix} -165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & -428.88 & 269385.51 \\ 0 & -269385.51 & 1128037841 \end{pmatrix} \cdot [R]^T = \begin{pmatrix} -164340.59 & 16434.06 & 0 \\ -42.67 & -426.75 & 269385.51 \\ -26804.84 & -268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[C_{43}] = \begin{pmatrix} -165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & -428.88 & -269385.51 \\ 0 & 269385.51 & 1128037841 \end{pmatrix} \cdot [R]^T = \begin{pmatrix} -164340.59 & 16434.06 & 0 \\ -42.67 & -426.75 & -269385.51 \\ 26804.84 & 268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix}$$

$$[C_{44}] = \begin{pmatrix} 165160.25 & 0 & 0 \\ 0 & 428.88 & -269385.51 \\ 0 & -269385.51 & 2256075682 \end{pmatrix} \cdot [R]^T = \begin{pmatrix} 164340.59 & -16434.06 & 0 \\ 42.67 & 426.75 & -269385.51 \\ -26804.84 & -268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix}$$

$$\{S_{34}\}_L = \begin{Bmatrix} -334.786 \\ 3345.979 \\ 700555.485 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 164340.59 & -16434.06 & 0 \\ 42.67 & 426.75 & 269385.51 \\ 26804.84 & 268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -8.6845 \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -164340.59 & 16434.06 & 0 \\ -42.67 & -426.75 & 269385.51 \\ -26804.84 & -268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.8217 \\ -0.0132 \\ 0.0041 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{43}\}_L = \begin{Bmatrix} -334.786 \\ 3345.979 \\ -700555.485 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} -164340.59 & 16434.06 & 0 \\ -42.67 & -426.75 & -269385.51 \\ 26804.84 & 268048.60 & 1128037841 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ -8.6845 \\ 0 \end{Bmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} 164340.59 & -16434.06 & 0 \\ 42.67 & 426.75 & -269385.51 \\ -26804.84 & -268048.60 & 2256075682 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.8217 \\ -0.0132 \\ 0.0041 \end{Bmatrix}$$

En resumen, las solicitaciones de extremo en la barra 3-4 son:

$$\{S_{34}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{34} \\ T_{34} \\ M_{34} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} 7132 \\ 713 \\ -1183936 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{43}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{43} \\ T_{43} \\ M_{43} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} -7801 \\ 5978 \\ -2123201 \end{Bmatrix}$$

• **Barra 4-5**

$$[C_{44}]_L = \begin{pmatrix} 550200 & 0 & 0 \\ 0 & 3884.83 & 971208 \\ 0 & 971208 & 323736000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -550200 & 0 \\ 3884.83 & 0 & 971208 \\ 971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix}$$

$$[C_{45}]_L = \begin{pmatrix} -550200 & 0 & 0 \\ 0 & -3884.83 & 971208 \\ 0 & -971208 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & 971208 \\ -971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[C_{54}]_L = \begin{pmatrix} -550200 & 0 & 0 \\ 0 & -3884.83 & -971208 \\ 0 & 971208 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & -971208 \\ 971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

$$[C_{55}]_L = \begin{pmatrix} 550200 & 0 & 0 \\ 0 & 3884.83 & -971208 \\ 0 & -971208 & 323736000 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -550200 & 0 \\ 3884.83 & 0 & -971208 \\ -971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix}$$

$$\{S_{45}\}_L = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -550200 & 0 \\ 3884.83 & 0 & 971208 \\ 971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.8217 \\ -0.0132 \\ 0.0041 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & 971208 \\ -971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{54}\}_L = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & -971208 \\ 971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0.8217 \\ -0.0132 \\ 0.0041 \end{Bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -550200 & 0 \\ -3884.83 & 0 & -971208 \\ -971208 & 0 & 323736000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

En resumen, las solicitaciones de extremo en la barra 4-5 son:

$$\{S_{45}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{45} \\ T_{45} \\ M_{45} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} 7240 \\ 7168 \\ 223201 \end{Bmatrix}$$

$$\{S_{54}\}_L = \begin{Bmatrix} N_{54} \\ T_{54} \\ M_{54} \end{Bmatrix}_L = \begin{Bmatrix} -7240 \\ -7168 \\ 1460594 \end{Bmatrix}$$

En las figuras 31, 32 y 33 se representan los diagramas de esfuerzos axiales, esfuerzos cortantes y momentos flectores de todas las barras del pórtico.

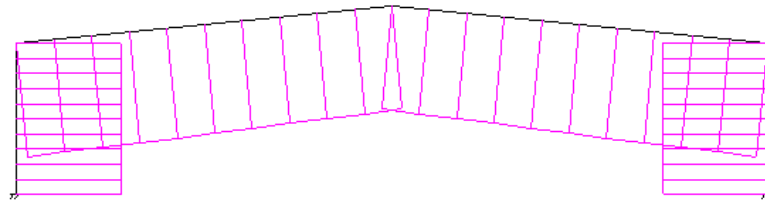


Figura 31. Diagrama de axiles.

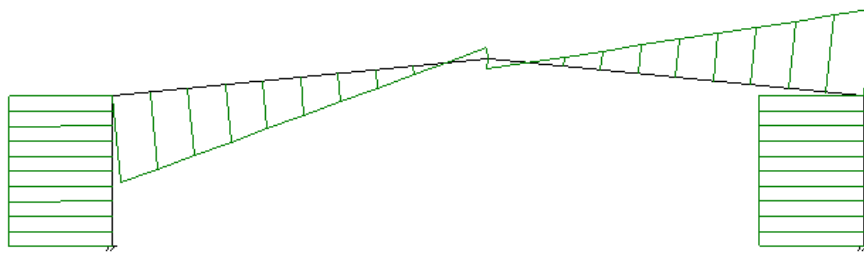


Figura 32. Diagrama de esfuerzos cortantes.

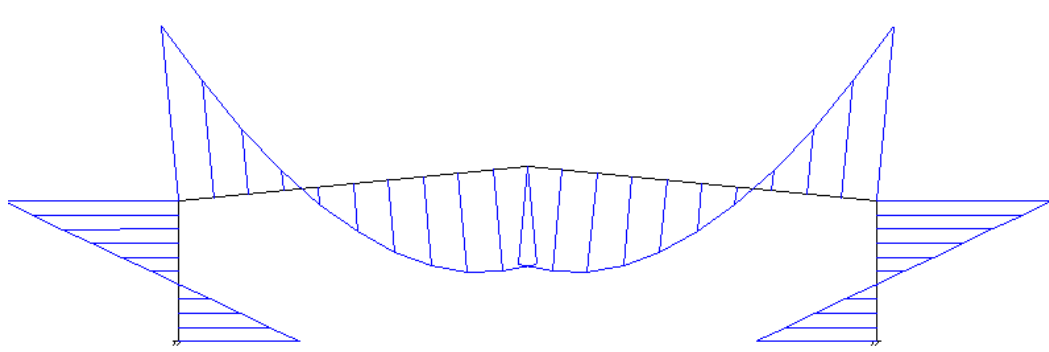


Figura 33. Diagrama de momentos flectores

#### 4.2.4. Reacciones externas.

Para calcular las reacciones externas, recurrimos a la expresión [21], mediante la cual obtenemos el vector de reacciones en función de los desplazamientos de los nudos libres. Así:

$$\{R\}_G = [K_I] \cdot \{d_I\}_G$$

donde  $[K_I]$  viene definido por [22]:

$$[K_I] = \begin{pmatrix} [K_{12}]_G & [0] & [0] \\ [0] & [0] & [K_{54}]_G \end{pmatrix}$$

Numéricamente,

$$[K_I] = \begin{pmatrix} -3884.83 & 0 & -971208 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -550200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 971208 & 0 & 161868000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3885 & 0 & -971208 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -550200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix}$$

Por tanto,

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ M_1 \\ R_{x5} \\ R_{y5} \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} -3884.83 & 0 & -971208 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -550200 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 971208 & 0 & 161868000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -3885 & 0 & -971208 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -550200 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 971208 & 0 & 161868000 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} -0.8217 \\ -0.0132 \\ -0.0041 \\ 0 \\ -8.6845 \\ 0 \\ 0.8217 \\ -0.0132 \\ 0.0041 \end{Bmatrix}$$

Operando obtenemos el valor de las reacciones externas:

$$\begin{Bmatrix} R_{x1} \\ R_{y1} \\ M_1 \\ R_{x5} \\ R_{y5} \\ M_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 7167.59 \text{ kg} \\ 7239.94 \text{ kg} \\ -1460594.18 \text{ kg}\cdot\text{cm} \\ -7167.59 \text{ kg} \\ 7239.94 \text{ kg} \\ 1460594.18 \text{ kg}\cdot\text{cm} \end{Bmatrix}$$

#### 4.2.5. Cálculo informático.

De la misma manera que en la obtención de las matrices de rigidez del pórtico, el cálculo manual se complementó con los cálculos informáticos recogidos en el archivo de Excel *Pórticos biempotrados a dos aguas simétricos*. Para calcular los desplazamientos de los nudos, las solicitaciones de extremo de las barras y las reacciones externas se va a recurrir a una serie de hojas del mismo fichero. La secuencia de las hojas de cálculo coincide con la sucesión en los cálculos matriciales hasta llegar a los resultados finales de este bloque temático, pues se continúan hasta determinar el valor de la carga crítica de pandeo global de la estructura, que se analizará posteriormente.

En la hoja *Cargas* se introducen los valores de las cargas que actúan sobre el pórtico. En la parte superior se muestran los datos del pórtico introducidos en *Kij barras*, así como una tabla resumen de las longitudes de las barras y de los ángulos que forman los ejes globales del pórtico con los ejes locales de cada barra. Las casillas que hay que rellenar son:

- C18      Peso propio del dintel, en t/m.
- C19      Peso propio de la cubierta más las correas, en t/m.
- C20      Sobrecarga que repercute sobre el dintel, en el caso de que exista, en t/m.
- C21      Carga de nieve, en t/m.
- I17      Carga puntual que actúa sobre los nudos 2 y 4, y que representa el peso propio del pilar, en kg.
- F20      Carga de viento sobre el pilar de barlovento, en kg/cm.
- F21      Carga de viento sobre el faldón de cubierta de barlovento, en kg/cm.
- H20      Carga de viento sobre el pilar de sotavento, en kg/cm.

H21 Carga de viento sobre el faldón de cubierta de sotavento, en kg/cm.

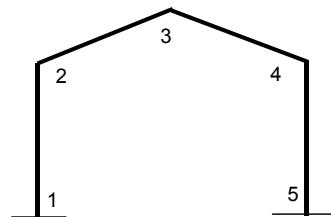
Una vez introducidos estos datos, en esta hoja de cálculo se muestran los valores de las reacciones de empotramiento de las barras en coordenadas locales y los valores de las cargas  $[P_a]_G$  en coordenadas globales. En la hoja de cálculo *Matriz K* aparecen las matrices  $[K]$ ,  $[K]^{-1}$ ,  $[K_i]$  y  $[P_a]_G$ , necesarias para la determinación de los desplazamientos de los nudos libres y de las reacciones externas.

En la hoja de cálculo *Cij* se muestran las submatrices de conversión  $[C_{ij}]$ , y en la hoja *Esfuerzos* se muestran los valores de las sollicitaciones de extremo de las barras del pórtico. En la parte inferior aparecen todas las submatrices necesarias para obtener los valores finales, mientras que en la parte superior se recogen dos tablas de cálculos previos, una de los desplazamientos de los nudos y otra de las reacciones de empotramiento de las barras en coordenadas locales.

### • Cargas

#### Obtención de cargas

Datos previos	Luz (m)	25		
	Altura pilares	5		
	Pendiente	10.00%		
	Pilar	HEB-280	I (cm <sup>4</sup> )	A (cm <sup>2</sup> )
	Dintel	IPE-450	19270	131
	E		33740	98.8
			2100000	
	0	Longitud (cm)	$\alpha$	
	Barra 1-2	500	90	
	Barra 2-3	1256.234453	5.710593137	
Barra 3-4	1256.234453	354.2894069		
Barra 4-5	500	270		



Datos	Peso propio	Dintel
		0.0776
	Sobrecarga	0.062395
	Nieve	0
	q (total)	0.537995
	q (kg/cm)	5.37995

Carga en nudo superior del pilar (peso propio)			515
	Viento	Viento	
Pilar 1-2	0	Pilar 4-5	0
Dintel 2-3	0	Dintel 3-4	0

#### Reacciones de empotramiento en coordenadas locales

##### Barra 1-2

Re1-2L	Ne1-2	0	Ne2-1	0	Re2-1L
	Te1-2	0	Te2-1	0	
	Me1-2	0	Me2-1	0	

##### Barra 2-3

Re2-3L	Ne2-3	334.5781453	Ne3-2	334.5781453	Re3-2L
	Te2-3	3345.781457	Te3-2	3345.781457	
	Me2-3	700514.3229	Me3-2	-700514.3229	

##### Barra 3-4

Re3-4L	Ne3-4	-334.5781453	Ne4-3	-334.5781453	Re4-3L
	Te3-4	3345.781457	Te4-3	3345.781457	
	Me3-4	700514.3229	Me4-3	-700514.3229	

##### Barra 4-5

Re4-5L	Ne4-5	0	Ne5-4	0	Re5-4L
	Te4-5	0	Te5-4	0	
	Me4-5	0	Me5-4	0	

**Cargas (coordenadas globales)**

P1	0			0			0
	0			0			0
	0			0			0
P2	0	5.68434E-14		0		0	-5.6843E-14
	-515	3362.46875		0		0	-3877.46875
	0	700514.3229		0		0	-700514.323
P3	0	5.68434E-14	2.41411E-05	0		0	-2.4141E-05
	0	3362.46875	3362.46875	0		0	-6724.9375
	0	-700514.3229	700514.3229	0		0	0
P4	0	2.41411E-05		0		0	-2.4141E-05
	-515	3362.46875		0		0	-3877.46875
	0	-700514.3229		0		0	700514.323
P5	0			0			0
	0			0			0
	0			0			0

• **Cij**

**Matrices Cij para la obtención de los esfuerzos en las barras**

BARRA 1-2									
C11	550200	0	0	0	1	0	0	550200	0
	0	3884.832	971208	-1	0	0	-3884.832	0	971208
	0	971208	323736000	0	0	1	-971208	0	323736000
C12	-550200	0	0	0	1	0	0	-550200	0
	0	-3884.832	971208	-1	0	0	3884.832	0	971208
	0	-971208	161868000	0	0	1	971208	0	161868000
C21	-550200	0	0	0	1	0	0	-550200	0
	0	-3884.832	-971208	-1	0	0	3884.832	0	-971208
	0	971208	161868000	0	0	1	-971208	0	161868000
C22	550200	0	0	0	1	0	0	550200	0
	0	3884.832	-971208	-1	0	0	-3884.832	0	-971208
	0	-971208	323736000	0	0	1	971208	0	323736000
BARRA 2-3									
C22	165160.253	0	0	0.99503719	0.99503719	0	164340.5941	16434.05939	0
	0	428.8777535	269385.505	-0.09950372	0.99503719	0	-42.6749314	426.7493148	269385.505
	0	269385.505	225607568.2	0	0	1	-26804.8596	268048.5959	225607568.2
C23	-165160.253	0	0	0.99503719	0.99503719	0	-164340.594	-16434.0594	0
	0	-428.877753	269385.505	-0.09950372	0.99503719	0	42.67493143	-426.749315	269385.505
	0	-269385.505	112803784.1	0	0	1	26804.85956	-268048.596	112803784.1
C32	-165160.253	0	0	0.99503719	0.99503719	0	-164340.594	-16434.0594	0
	0	-428.877753	-269385.505	-0.09950372	0.99503719	0	42.67493143	-426.749315	-269385.505
	0	269385.505	112803784.1	0	0	1	-26804.8596	268048.5959	112803784.1
C33	165160.253	0	0	0.99503719	0.99503719	0	164340.5941	16434.05939	0
	0	428.8777535	-269385.505	-0.09950372	0.99503719	0	-42.6749314	426.7493148	-269385.505
	0	-269385.505	225607568.2	0	0	1	26804.85956	-268048.596	225607568.2
BARRA 3-4									
C33	165160.253	0	0	0.99503719	-0.09950373	0	164340.5939	-16434.0606	0
	0	428.8777535	269385.505	0.099503726	0.99503719	0	42.67493449	426.7493145	269385.505
	0	269385.505	225607568.2	0	0	1	26804.86149	268048.5957	225607568.2
C34	-165160.253	0	0	0.99503719	-0.09950373	0	-164340.594	16434.06057	0
	0	-428.877753	269385.505	0.099503726	0.99503719	0	-42.6749345	-426.749314	269385.505
	0	-269385.505	112803784.1	0	0	1	-26804.8615	-268048.596	112803784.1
C43	-165160.253	0	0	0.99503719	-0.09950373	0	-164340.594	16434.06057	0
	0	-428.877753	-269385.505	0.099503726	0.99503719	0	-42.6749345	-426.749314	-269385.505
	0	269385.505	112803784.1	0	0	1	26804.86149	268048.5957	112803784.1
C44	165160.253	0	0	0.99503719	-0.09950373	0	164340.5939	-16434.0606	0
	0	428.8777535	-269385.505	0.099503726	0.99503719	0	42.67493449	426.7493145	-269385.505
	0	-269385.505	225607568.2	0	0	1	-26804.8615	-268048.596	225607568.2

BARRA 4-5									
C44	550200	0	0	0	-1	0	0	-550200	0
	0	3884.832	971208	1	0	0	3884.832	0	971208
	0	971208	323736000	0	0	1	971208	0	323736000
C45	-550200	0	0	0	-1	0	0	550200	0
	0	-3884.832	971208	1	0	0	-3884.832	0	971208
	0	-971208	161868000	0	0	1	-971208	0	161868000
C54	-550200	0	0	0	-1	0	0	550200	0
	0	-3884.832	-971208	1	0	0	-3884.832	0	-971208
	0	971208	161868000	0	0	1	971208	0	161868000
C55	550200	0	0	0	-1	0	0	-550200	0
	0	3884.832	-971208	1	0	0	3884.832	0	-971208
	0	-971208	323736000	0	0	1	-971208	0	323736000

• **Esfuerzos**

**Cálculo de los esfuerzos en las barras**

Cálculos previos	Desplazamientos (cm y rad)									
		Nudo 2		Nudo 3		Nudo 4				
	$\delta x$	-0.82164367	-4.4059E-08	0.82164364						
	$\delta y$	-0.01315874	-8.6839318	-0.01315874						
$\theta$	-0.0040935	-9.3604E-12	0.0040935							
Cálculos previos	Reacciones en coordenadas locales (kg y cm)									
		N			T			M		
	Re 1-2	0	0	0	Re 3-4	-334.578145	3345.78146	700514.323		
	Re 2-1	0	0	0	Re 4-3	-334.578145	3345.78146	-700514.323		
	Re 2-3	334.578145	3345.78146	700514.323	Re 4-5	0	0	0		
	Re 3-2	334.578145	3345.78146	-700514.323	Re 5-4	0	0	0		
Resultados	Barra 1-2		Barra 2-3		Barra 3-4		Barra 4-5			
	N12	7240	N23	7801	N34	7132	N45	7240		
	T12	-7168	T23	5978	T34	713	T45	7168		
	M12	-1460594	M23	2123201	M34	-1183936	M45	2123201		
	N21	-7240	N32	-7132	N43	-7801	N54	-7240		
	T21	7168	T32	713	T43	5978	T54	-7168		
M21	-2123201	M32	1183936	M43	-2123201	M54	1460594			
N12	0	0	550200	0	0	0	-550200	0	-0.82164367	
T12	0	-3884.832	0	971208	0	3884.832	0	971208	-0.01315874	
M12	0	-971208	0	323736000	0	971208	0	161868000	-0.0040935	
N21	0	0	-550200	0	0	0	550200	0	-0.82164367	
T21	0	3884.832	0	-971208	0	-3884.832	0	-971208	-0.01315874	
M21	0	-971208	0	161868000	0	971208	0	323736000	-0.0040935	
N23	334.578145	164340.594	16434.0594	0	-0.82164367	-164340.594	-16434.0594	0	-4.4059E-08	
T23	3345.78146	-42.6749314	426.749315	269385.505	-0.01315874	42.6749314	-426.749315	269385.505	-8.6839318	
M23	700514.323	-26804.8596	268048.596	225607568	-0.0040935	26804.8596	-268048.596	112803784	-9.3604E-12	
N32	334.578145	-164340.594	-16434.0594	0	-0.82164367	164340.594	16434.0594	0	-4.4059E-08	
T32	3345.78146	42.6749314	-426.749315	-269385.505	-0.01315874	-42.6749314	426.749315	-269385.505	-8.6839318	
M32	-700514.323	26804.8596	268048.596	112803784	-0.0040935	26804.8596	-268048.596	225607568	-9.3604E-12	
N34	-334.578145	164340.594	-16434.0606	0	-4.4059E-08	-164340.594	16434.0606	0	0.82164364	
T34	3345.78146	-42.6749345	426.749314	269385.505	-8.6839318	42.6749345	-426.749314	269385.505	-0.01315874	
M34	700514.323	26804.8615	268048.596	225607568	-9.3604E-12	-26804.8615	-268048.596	112803784	0.0040935	
N43	-334.578145	-164340.594	16434.0606	0	-4.4059E-08	164340.594	-16434.0606	0	0.82164364	
T43	3345.78146	-42.6749345	-426.749314	-269385.505	-8.6839318	42.6749345	426.749314	-269385.505	-0.01315874	
M43	-700514.323	26804.8615	268048.596	112803784	-9.3604E-12	-26804.8615	-268048.596	225607568	0.0040935	
N45	0	0	-550200	0	0.82164364	0	550200	0	0	
T45	0	3884.832	0	971208	-0.01315874	-3884.832	0	971208	0	
M45	0	971208	0	323736000	0.0040935	-971208	0	161868000	0	
N54	0	0	550200	0	0.82164364	0	-550200	0	0	
T54	0	-3884.832	0	-971208	-0.01315874	3884.832	0	-971208	0	
M54	0	971208	0	161868000	0.0040935	-971208	0	323736000	0	



• **Matriz K**

Matriz K									
167414.0813	16310.03713	944403.1404	-163529.2493	-16310.03713	-26804.85956	0	0	0	0
16310.03713	552259.8815	268048.5959	-16310.03713	-2059.881465	268048.5959	0	0	0	0
944403.1404	268048.5959	549343568.2	26804.85956	-268048.5959	112803784.1	0	0	0	0
-163529.2493	-16310.03713	26804.85956	327058.4983	-0.001159283	53609.72105	-163529.249	16310.03829	26804.86149	26804.86149
-16310.03713	-2059.881465	-268048.5959	-0.001159283	4119.763164	-0.000192448	16310.03829	-2059.881699	268048.5957	268048.5957
-26804.85956	268048.5959	112803784.1	53609.72105	-0.000192448	451215136.5	-26804.86149	-268048.5957	112803784.1	112803784.1
0	0	0	-163529.249	16310.03829	-26804.86149	167414.081	-16310.03829	944403.1385	944403.1385
0	0	0	16310.03829	-2059.881699	-268048.5957	-16310.03829	552259.8817	-268048.5957	-268048.5957
0	0	0	26804.86149	268048.5957	112803784.1	944403.1385	-268048.5957	549343568.2	549343568.2

Matriz K1									
-3884.832	0	-971208	0	0	0	0	0	0	0
0	-550200	0	0	0	0	0	0	0	0
971208	0	161868000	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	-3885	0	-971208	0
0	0	0	0	0	0	0	-550200	0	0
0	0	0	0	0	0	971208	0	161868000	0

Matriz P	Matriz K-1								
-5.68434E-14	0.000267708	1.22937E-07	-4.67607E-07	0.000253706	0.000115474	2.49742E-07	0.000239598	-1.22937E-07	-5.31972E-07
-3877.46875	1.22937E-07	1.81746E-06	-4.91749E-10	2.13788E-07	9.0876E-07	-8.44566E-10	1.22937E-07	5.78687E-11	-4.91749E-10
-700514.3229	-4.67607E-07	-4.91749E-10	3.04473E-09	-5.00003E-07	3.90877E-07	-9.98969E-10	-5.31972E-07	4.91749E-10	9.53581E-10
-2.41411E-05	0.000253706	2.13788E-07	-5.00003E-07	0.000256826	4.42121E-12	2.49377E-07	0.000253706	-2.13788E-07	-5.00003E-07
-6724.9375	0.000115474	9.0876E-07	3.90877E-07	4.42121E-12	0.001208822	-3.78905E-16	-0.000115474	9.0876E-07	-3.90877E-07
0	2.49742E-07	-8.44566E-10	-9.98969E-10	2.49377E-07	-3.78913E-16	2.71677E-09	2.49742E-07	8.44566E-10	-9.98969E-10
-2.41411E-05	0.000239598	1.22937E-07	-5.31972E-07	0.000253706	-0.000115474	2.49742E-07	0.000267708	-1.22937E-07	-4.67607E-07
-3877.46875	-1.22937E-07	5.78687E-11	4.91749E-10	-2.13788E-07	9.0876E-07	8.44566E-10	-1.22937E-07	1.81746E-06	4.91749E-10
700514.3229	-5.31972E-07	-4.91749E-10	9.53581E-10	-5.00003E-07	-3.90877E-07	-9.98969E-10	-4.67607E-07	4.91749E-10	3.04473E-09

Desplazamientos (cm y rad)			
δ2x	-0.821643668		-0.822
δ2y	-0.013158738	d2	-0.013
θ2	-0.004093504		-0.004
δ3x	-4.40587E-08		0.000
δ3y	-8.683931795	d3	-8.684
θ3	-9.36039E-12		0.000
δ4x	0.821643643		0.822
δ4y	-0.013158738	d4	-0.013
θ4	0.004093504		0.004

Reacciones (kg y cm)		
R1	Rx	7167.591289
	Ry	7239.937478
	M	-1460594.183
R7	Rx	-7167.59124
	Ry	7239.937523
	M	1460594.167