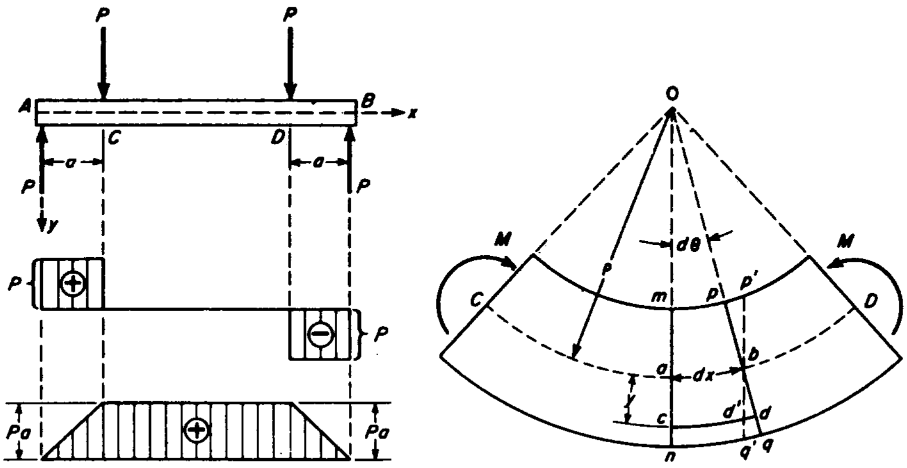
Tema 3: FORMULAS DE LA FLEXION

- Fórmula general de la flexión: Momento de inercia y módulo resistente.
- Efecto de la forma de la sección transversal.
- Variación de la sección en el sentido longitudinal.
- Esfuerzo cortante en la flexión. Momento estático.
- Influencia de la forma de la sección transversal.

FORMULA GENERAL DE LA FLEXION



Después de la deformación, los planos de las dos secciones laterales adyacentes mn y pq se cortan en O. Designando por dθ el ángulo que forman estos planos se observa que:

$$dx = \rho \cdot d\theta$$

$$d\theta = \frac{1}{\rho} \cdot dx$$

siendo $\frac{1}{\rho}$ la curvatura del eje neutro.

Se traza por el punto b del eje neutro una recta p'q' paralela a mn para indicar la orientación primitiva de la sección transversal antes de la flexión.

El segmento cd de una fibra distante y de la superficie neutra se alarga una magnitud dd' ($dd' = y \cdot d\theta$). Como la longitud inicial de dd' era dx, la deformación correspondiente es:

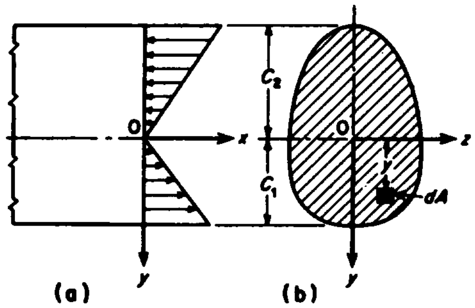
$$\varepsilon_x = \frac{\delta}{l} = \frac{dd'}{dx} = \frac{y \cdot d\theta}{dx}$$

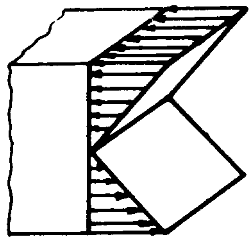
$$\varepsilon_x = \frac{y}{\rho}$$

Fibras cara convexa: alargamiento $\rightarrow$ TRACCION
Fibras cara cóncava: acortamiento $\rightarrow$ COMPRESION

La tensión de cada fibra será directamente proporcional a su deformación longitudinal: $\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E = \frac{E}{\rho} \cdot y$

DETERMINACION DEL EJE NEUTRO





El fuerza que actúa sobre un elemento de área dA es $\sigma_x \cdot dA$

Aplicando la ecuación $\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E = \frac{E}{\rho} \cdot y$

se tiene que el elemento de fuerza que actúa sobre el área dA es:

$$\sigma_x \cdot dA = \left(\frac{E}{\rho} \cdot y \right) \cdot dA$$

Puesto que NO debe haber fuerza normal resultante N_x (FLEXION PURA)

$$\sum F = 0$$

$$\int_A \sigma_x \cdot dA = \int_A \left(\frac{E}{\rho} \cdot y \right) \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = 0$$

Como $\frac{E}{\rho} \neq 0$ se deduce que $\int_A y \cdot dA = 0$

Recordando que $y_c = \frac{\int_A y \cdot dA}{A}$

se tiene $\int_A y \cdot dA = y_c \cdot A = 0$

Como $A \neq 0$ $y_c=0$, lo que indica que el EJE NEUTRO de la sección recta pasa por su centro de gravedad.

Las tensiones distribuidas en la sección recta deben originar un par resistente M.

El momento de la fuerza elemental $\sigma_x \cdot dA$ respecto al eje neutro de la sección es $dM=\sigma_x \cdot dA \cdot y$.

La suma de los momentos elementales en el área total debe producir el momento de flexión M en esta sección. Así:

$$M = \int_A y \cdot \sigma_x \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA$$

$$I = \int_A y^2 \cdot dA$$

$$\boxed{\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}}$$

E·I se denomina rigidez de la flexión de la viga.

Combinando las expresiones $\sigma_x = \varepsilon_x \cdot E = \frac{E}{\rho} \cdot y$ y $\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$, se tiene que

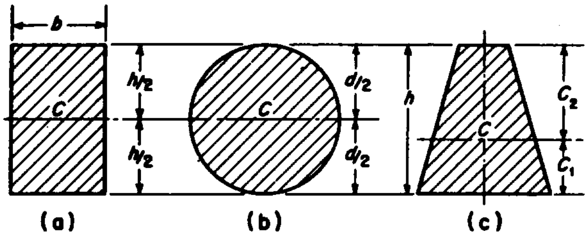
$$\sigma_x = \frac{M \cdot y}{I}$$

Cara inferior (convexidad) TRACCION
Cara superior (concavidad) COMPRESION

Llamando c_1 y c_2 a las distancias a las fibras extremas en tracción y compresión, respectivamente:

$$\sigma_T = \frac{M \cdot c_1}{I} \qquad \sigma_C = \frac{M \cdot c_2}{I}$$

Si la sección transversal es simétrica con respecto a su eje de gravedad, $c_1=c_2=c$ y las tensiones de las fibras extremas en tracción y compresión son iguales.



Introduciendo las notaciones $W_1 = \frac{I}{c_1}$ y $W_2 = \frac{I}{c_2}$ llamados MODULOS DE RESISTENCIA o MOMENTOS RESISTENTES de la sección, se tiene:

$$\sigma_T = \frac{M}{W_1} \qquad \sigma_C = \frac{M}{W_2}$$

- En el caso de una sección rectangular de anchura b y altura h

$$c_1 = c_2 = \frac{h}{2}$$

$$I = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

$$W_1 = W_2 = \frac{I}{c} = \frac{\frac{b \cdot h^3}{12}}{\frac{h}{2}} = \frac{b \cdot h^2}{6}$$

- En el caso de una sección circular de diámetro d

$$c_1 = c_2 = \frac{d}{2}$$

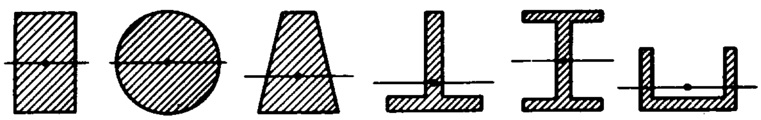
$$I = \frac{\pi \cdot d^4}{64}$$

$$W_1 = W_2 = \frac{\pi \cdot d^3}{32}$$

- En el caso de una sección trapecial

Si $c_1 < c_2 \rightarrow W_1 > W_2 \rightarrow \sigma_T < \sigma_C$

EFECTO DE LA FORMA DE LA SECCION TRANSVERSAL



- Si el material tiene la misma resistencia a tracción que a compresión, lo lógico será elegir formas de sección transversal cuyo c.d.g. esté en el plano medio de la viga.
  - ∗ Secciones simétricas
  - ∗ Si la sección no es simétrica, el material se suele distribuir entre la cabeza y la base de modo que su c.d.g. esté próximo a la paralela media.
- Si el material NO tiene la misma resistencia a tracción que a compresión, la mejor sección recta es asimétrica con respecto al eje neutro.

  Las distancias c_1 y c_2 deben guardar la misma proporción que las resistencias del material a tracción y compresión.

En el **diseño de una viga** que ha de estar expuesta a **flexión**, no sólo deben ser satisfechas las condiciones de **resistencia**, sino que debe satisfacerse la condición de **economía de peso** de la viga.

Dos secciones con el mismo momento resistente, la más económica será la de **menor área**.

- Sección rectangular de altura h y anchura b

$$W = \frac{b \cdot h^2}{6} = \frac{A \cdot h}{6}$$

- Sección circular de diámetro d

$$W = \frac{\pi \cdot d^3}{32} = \frac{A \cdot d}{8} = 0.125 \cdot A \cdot d$$

Comparando una sección circular y una sección cuadrada del mismo área, se tiene:

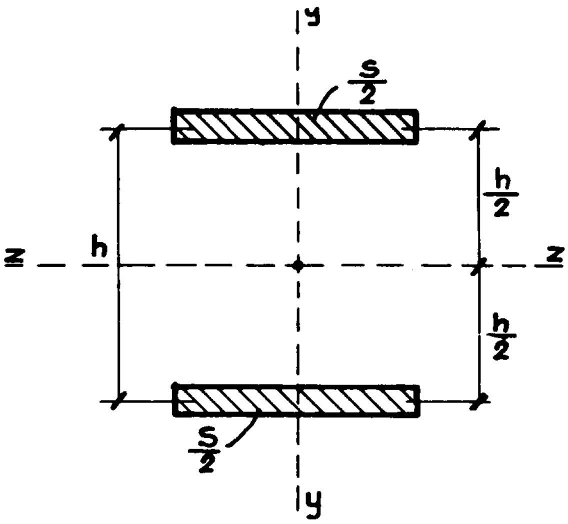
$$h^2 = \frac{\pi \cdot d^2}{4} \qquad \rightarrow \qquad h = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot d$$

$$W = \frac{A \cdot h}{6} = \frac{A}{6} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{12} \cdot d = 0.148 \cdot A \cdot d$$

Por tanto, una sección transversal cuadrada es más económica que una circular.

Para el proyecto más económico, la mayor parte del material de la viga debe estar situado tan lejos del eje neutro como sea posible.

Caso ideal teórico:



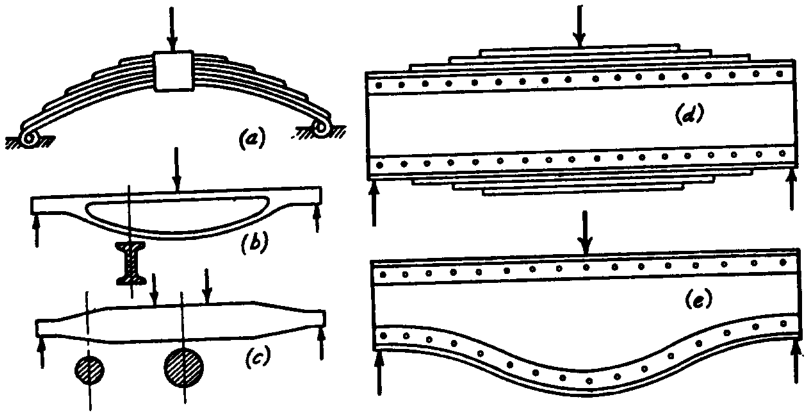
$$I = 2 \cdot \frac{A}{2} \cdot \left(\frac{h}{2}\right)^2 = \frac{A \cdot h^2}{4}$$

$$W = \frac{\frac{A \cdot h^2}{4}}{\frac{h}{2}} = \frac{A \cdot h}{2}$$

Para una sección de ala ancha normalizada:

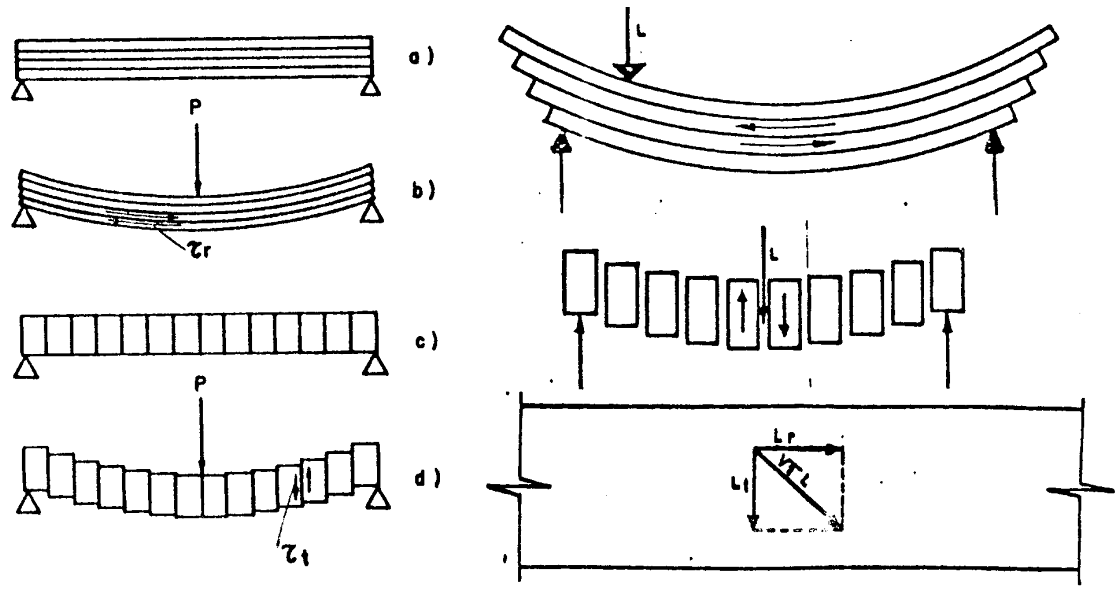
$$W \cong \frac{A \cdot h}{3}$$

VARIACION DE LA SECCION EN SENTIDO LONGITUDINAL



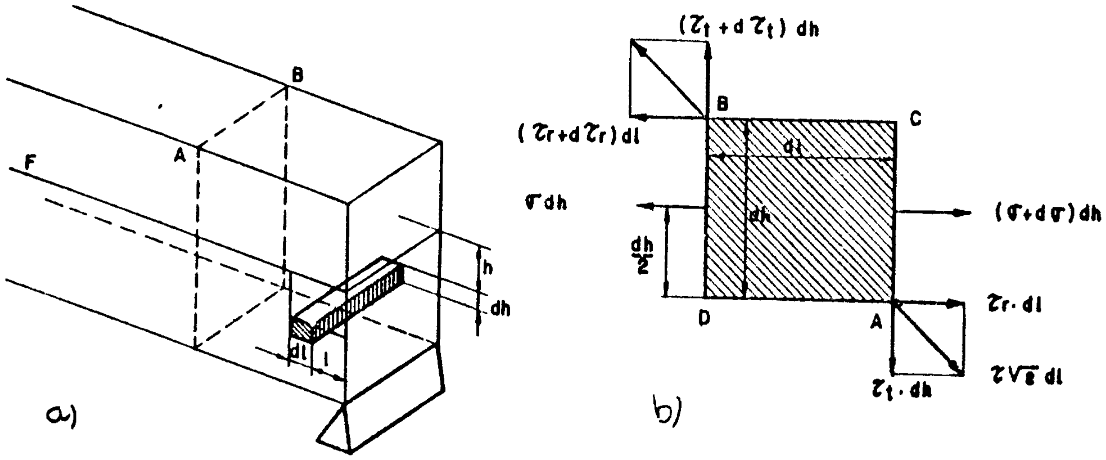
Vigas que se aproximan a las condiciones de igual resistencia en sus diversas secciones

TENSIONES DE CIZALLADURA EN LA FLEXION



τ_r : Tensiones rasantes

τ_t : Tensiones tangenciales



Suponemos $\overline{AB} = 1$

Las fuerzas normales en las dos caras serán:

$$\sigma \cdot dh \cdot 1 \qquad \text{y} \qquad (\sigma + d\sigma) \cdot dh \cdot 1$$

Las tensiones rasantes en A serán:

$$\tau_r \cdot dl \cdot 1 \qquad \text{y} \qquad \tau_t \cdot dh \cdot 1$$

Las tensiones rasantes en B serán:

$$(\tau_r + d\tau_r) \cdot dl \cdot 1 \qquad \text{y} \qquad (\tau_t + d\tau_t) \cdot dh \cdot 1$$

Tomando momentos respecto a A:

$$(\sigma + d\sigma) \cdot dh \cdot \frac{dh}{2} - \sigma \cdot dh \cdot \frac{dh}{2} + (\tau_t + d\tau_t) \cdot dh \cdot dl - (\tau_r + d\tau_r) \cdot dl \cdot dh = 0$$

Despreciando infinitésimos de 3er orden:

$$\tau_r \cdot dl \cdot dh = \tau_t \cdot dl \cdot dh \quad \Rightarrow \quad \tau_r = \tau_t$$

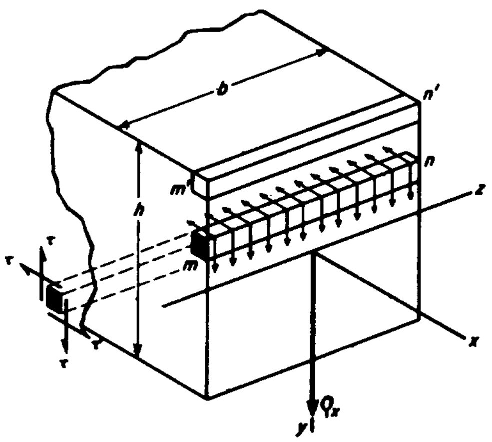
ESFUERZO CORTANTE en la FLEXION

En una viga sometida a flexión, en cada sección transversal hay momento flector y esfuerzo cortante.

El MOMENTO FLECTOR representa la RESULTANTE de una cierta distribución lineal de las TENSIONES NORMALES σ en la sección.

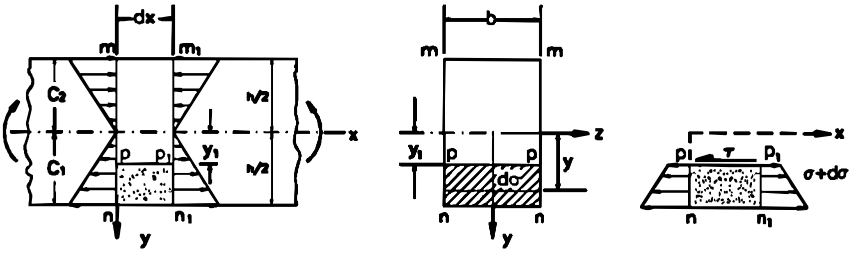
El ESFUERZO CORTANTE debe ser la RESULTANTE de una cierta distribución de TENSIONES CORTANTES τ en la sección.

¿Cómo es la distribución de τ en la sección para satisfacer las condiciones de equilibrio?



La tensión cortante τ debe variar con la distancia y al eje neutro, siendo nula para $y = \pm \frac{h}{2}$

ESFUERZO CORTANTE en la FLEXION. MOMENTO ESTATICO



(a) (b) (c)

- Si **M** es **constante**, $d\sigma = 0$, y en ambas caras hay la misma distribución de tensiones normales σ.

  Entonces $\tau = 0$, lo que confirma que la flexión pura no produce tensiones cortantes en la viga.

- **Caso general**: Momento flector variable.

  La fuerza que actúa sobre un área elemental *dA* a la izquierda del bloque (cara *pn*):

$$\sigma \cdot dA = \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA$$

Sobre toda la cara:

$$\int_{y_1}^{c_1} \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA \qquad (1)$$

La fuerza que actúa sobre un área elemental *dA* a la derecha del bloque (cara p_1n_1):

$$\int_{y_1}^{c_1} \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot dA \qquad (2)$$

La fuerza cortante que actúa sobre la cara superior del bloque es:

$$\tau \cdot b \cdot dx \qquad (3)$$

Si establecemos el equilibrio entre (1), (2) y (3), se tiene:

$$\tau \cdot b \cdot dx = \int_{y_1}^{c_1} \frac{(M + dM) \cdot y}{I} \cdot dA - \int_{y_1}^{c_1} \frac{M \cdot y}{I} \cdot dA$$

Por tanto

$$\tau \cdot b \cdot dx = \int_{y_1}^{c_1} \frac{dM \cdot y}{I} \cdot dA$$

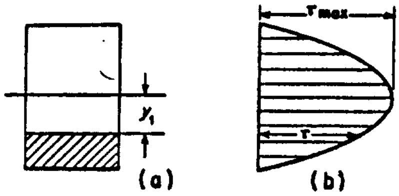
$$\tau = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{I \cdot b} \cdot \int_{y_1}^{c_1} y \cdot dA$$

$$Q = \frac{dM}{dx}$$

$S = \int_{y_1}^{c_1} y \cdot dA$ es el momento estático

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}$$

CORTANTE en la FLEXION. MOMENTO ESTATICO. SECCION RECTANGULAR



$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}$$

$$S = \int_{y_1}^{c_1} y \cdot dA$$

$$dA = b \cdot dy$$

Al ser la sección rectangular, $c_1 = \frac{h}{2}$

$$S = \int_{y_1}^{h/2} y \cdot b \cdot dy = b \cdot \int_{y_1}^{h/2} y \cdot dy = b \cdot \left.\frac{y^2}{2}\right]_{y_1}^{h/2} = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

El momento estático se puede expresar como producto del área de la sección por la distancia desde el cdg hasta el eje neutro.

$$Area = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y_1 \right)$$

$$d^a = y_1 + \left(\frac{\frac{h}{2} - y_1}{2} \right) = y_1 + \frac{h}{4} - \frac{y_1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y_1 \right)$$

$$Area \cdot d^a = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y_1 \right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{h}{2} + y_1 \right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$

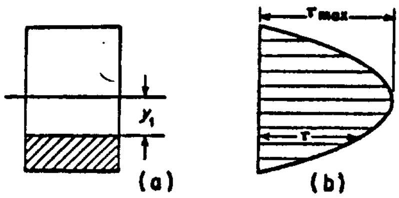
$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b} = \frac{Q \cdot b}{I \cdot b \cdot 2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right) = \frac{Q}{2 \cdot I} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y_1^2 \right)$$ Variación PARABOLICA

En una sección rectangular, $I = \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3$

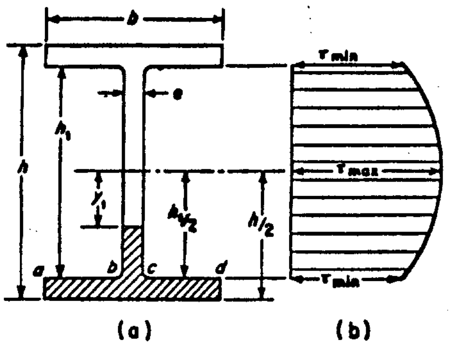
El esfuerzo máximo se produce en el eje neutro $\Rightarrow$ $y_1 = 0$

$$\tau_{máx} = \frac{Q}{2 \cdot \frac{1}{12} \cdot b \cdot h^3} \cdot \frac{h^2}{4} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{b \cdot h} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q}{A}$$

Para una sección circular, $\tau_{máx} = \frac{4}{3} \cdot \frac{Q}{A}$



CORTANTE en la FLEXION. MOMENTO ESTATICO. VIGA en I



$$S = b\cdot\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right)\cdot\left(\frac{h_1}{2}+\frac{\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}}{2}\right)+e\cdot\left(\frac{h_1}{2}-y_1\right)\cdot\left(y_1+\frac{\frac{h_1}{2}-y_1}{2}\right)$$

$$S = b\cdot\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right)\cdot\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h}{4}-\frac{h_1}{4}\right)+e\cdot\left(\frac{h_1}{2}-y_1\right)\cdot\left(y_1+\frac{h_1}{4}-\frac{y_1}{2}\right)$$

$$S = b\cdot\left(\frac{h}{2}-\frac{h_1}{2}\right)\cdot\left(\frac{h_1}{2}+\frac{h}{4}\right)+e\cdot\left(\frac{h_1}{2}-y_1\right)\cdot\left(\frac{y_1}{2}+\frac{h_1}{4}\right)$$

$$S = \frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+\frac{e}{2}\cdot\left(\frac{h_1^2}{4}-y_1^2\right)$$

$$\tau = \frac{Q\cdot S}{I\cdot b}$$ (Expresión genérica; en el alma $b = e$)

$y_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau_{máx}$

$$\tau_{máx} = \frac{Q}{I\cdot e}\cdot\left(\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)+\frac{e\cdot h_1^2}{8}\right)$$

$y_1 = \frac{h_1}{2} \quad \Rightarrow \quad \tau_{mín}$

$$\tau_{mín} = \frac{Q}{I\cdot e}\cdot\left(\frac{b}{2}\cdot\left(\frac{h^2}{4}-\frac{h_1^2}{4}\right)\right)$$