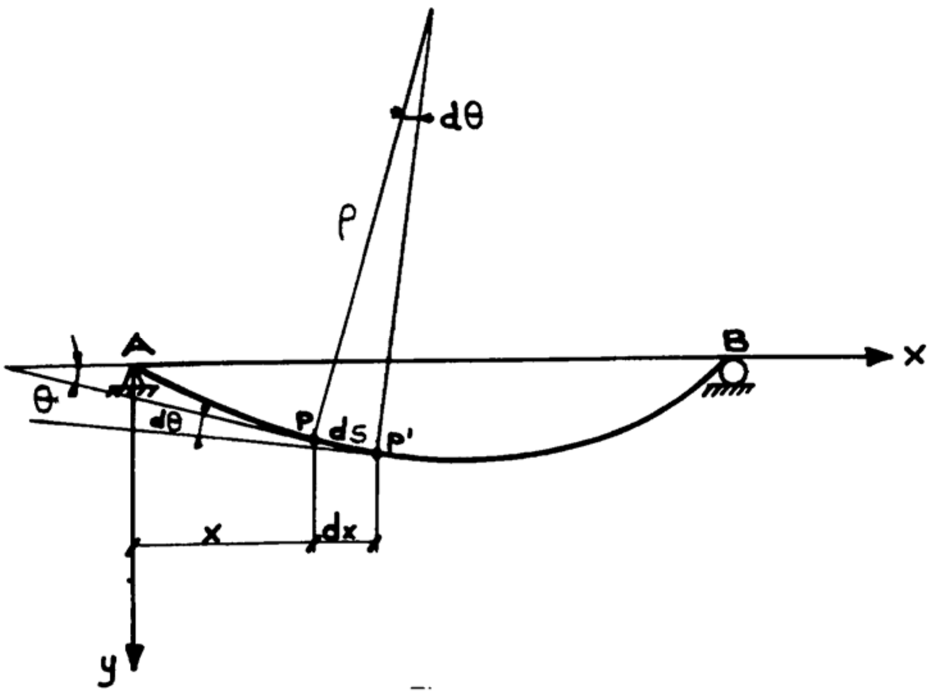
Tema 4: DEFORMACION EN LA FLEXION

- Deformación en las vigas. Ecuación de la elástica.
- Definición de flecha.
- Método del área-momento. Teoremas de Mohr.
- Aplicación de los teoremas de Mohr para la resolución de vigas hiperestáticas.
- Método de la superposición.

DEFORMACION en las VIGAS. ECUACION de la ELASTICA



En el estudio de la flexión pura vinos que:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I} \qquad (1)$$

Para expresar esta curva en coordenadas rectangulares:

$$ds = \rho \cdot d\theta$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad (2)$$

Como el ángulo es muy pequeño:

$$ds \cong dx$$

$$\theta \cong tag\theta = \frac{dy}{dx}$$

$$\left|\frac{d^2y}{dx^2}\right| = \frac{1}{\rho} \qquad (3)$$

De (1) y (3):

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \pm\frac{M}{E \cdot I} \qquad (4)$$

En la figura $\frac{dy}{dx}$ decreciente $\frac{d^2y}{dx^2}$ negativa

$\frac{d^2y}{dx^2}$ signo contrario a M

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I} \qquad (5)$$

Ecuación diferencial de la elástica

Limitaciones:

- La ecuación es válida para vigas que no estén sometidas a un esfuerzo que exceda del límite elástico de sus materiales.
- Al ser la curvatura pequeña, la ecuación está limitada al estudio de flechas pequeñas.

Si diferenciamos (5) dos veces:

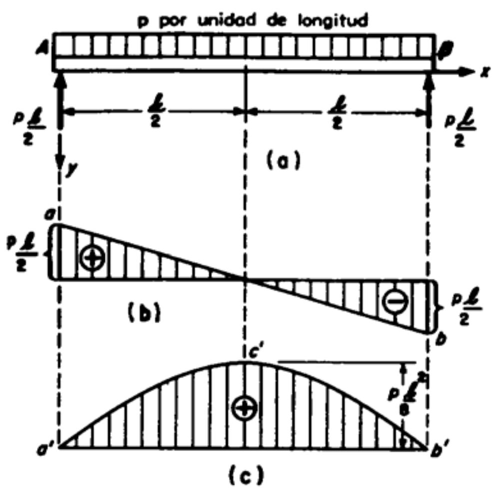
$$E \cdot I \cdot \frac{d^3y}{dx^3} = -\frac{dM}{dx} = -Q$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^4y}{dx^4} = -\frac{dQ}{dx} = q$$

Q Esfuerzo cortante

q Intensidad de carga uniformemente repartida

Ejemplo de obtención de la ecuación diferencial de la elástica



$$M = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{M}{E \cdot I}$$

$$-E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{q \cdot l}{2} \cdot x - \frac{q}{2} \cdot x^2$$

$$E \cdot I \cdot \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{q \cdot l}{2} \cdot x + \frac{q}{2} \cdot x^2$$

Multiplicando los dos miembros por dx e integrando:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot x^2 + \frac{q}{6} \cdot x^3 + C_1 \qquad (1)$$

Para determinar el valor de la constante de integración C_1:

- La tangente es horizontal en el centro del vano

En $x = \frac{l}{2}$ $\qquad \frac{dy}{dx} = 0$

$$0 = -\frac{q \cdot l \cdot l^2}{16} + \frac{q \cdot l^3}{48} + C_1$$

$$C_1 = \frac{q \cdot l^3}{16} - \frac{q \cdot l^3}{48} = \frac{q \cdot l^3}{24}$$

Introduciendo el valor obtenido de C_1 en (1) se tiene:

$$E \cdot I \cdot \frac{dy}{dx} = -\frac{q \cdot l}{4} \cdot x^2 + \frac{q}{6} \cdot x^3 + \frac{q \cdot l^3}{24} \qquad (2)$$

De nuevo se multiplica los dos miembros por dx y se integra:

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot x^3 + \frac{q}{24} \cdot x^4 + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot x + C_2 \qquad (3)$$

Para determinar el valor de la constante de integración C_2:

- En los apoyos, la deformación vertical es nula

En $x = 0$ $\quad y = 0 \quad \rightarrow \quad C_2=0$

$$E \cdot I \cdot y = -\frac{q \cdot l}{12} \cdot x^3 + \frac{q}{24} \cdot x^4 + \frac{q \cdot l^3}{24} \cdot x \qquad (4)$$

Por tanto, la ecuación de la elástica es:

$$y = \frac{q \cdot x}{24 \cdot E \cdot I} \cdot \left(l^3 - 2 \cdot l \cdot x^2 + x^3\right) \qquad (5)$$

Para hallar la **flecha máxima**:

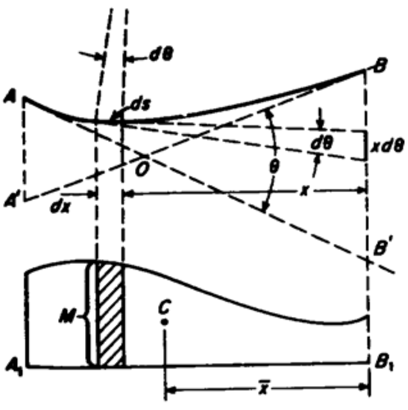
- Se deriva (5), se estudia el punto en que la tangente es nula (se despeja x) y se introduce el valor obtenido en (5).
- Directamente, en $x = \frac{l}{2}$

$$\delta = y_{máx} = \frac{5 \cdot q \cdot l^4}{384 \cdot E \cdot I}$$

Para hallar el **ángulo girado** en el apoyo A (máxima pendiente):

En $x = 0$ $\quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=0} = \theta_A = \frac{q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot I}$

METODO DEL AREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTOS
TEOREMAS DE MOHR



$$ds = \rho \cdot d\theta \qquad \frac{d\theta}{ds} = \frac{1}{\rho} \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{M}{E \cdot I}$$

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{E \cdot I}$$

Como $\quad ds \cong dx$

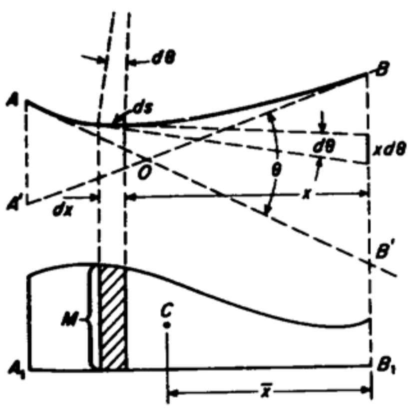
$$d\theta = \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}$$

$$\theta = \int_A^B \frac{M \cdot dx}{E \cdot I}$$

TEOREMA I

El ángulo θ comprendido entre las tangentes de dos puntos cualesquiera A y B de la línea elástica es igual al área total del trozo correspondiente del diagrama de momentos, dividida por E·I.

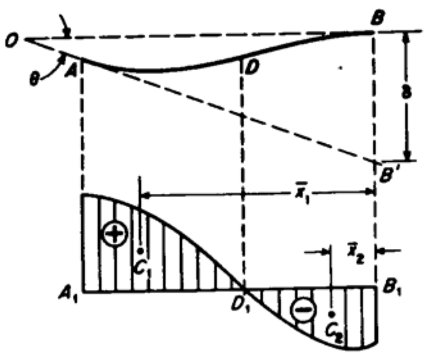
METODO DEL AREA DEL DIAGRAMA DE MOMENTOS
TEOREMAS DE MOHR



$$\delta = \int_A^B x \cdot d\theta = \int_A^B \frac{M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I}$$

TEOREMA II

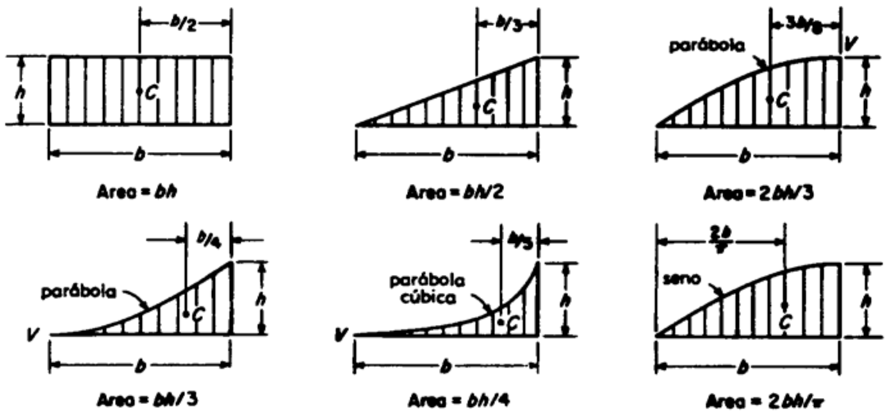
La ordenada B respecto a la tangente en A es igual al momento estático, con respecto a B, del área del diagrama de momentos flectores comprendida entre A y B, dividida por E·I.



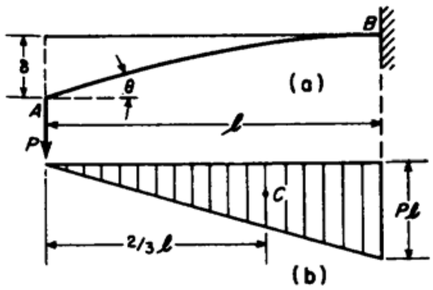
Si existe un punto de inflexión en la línea elástica entre A y B:

$$\delta = \int_A^D \frac{M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I} - \int_D^B \frac{M \cdot x \cdot dx}{E \cdot I}$$

$$\delta = \left| \frac{\text{área}}{E \cdot I} \right|_A^D \cdot \overline{x_1} - \left| \frac{\text{área}}{E \cdot I} \right|_D^B \cdot \overline{x_2}$$



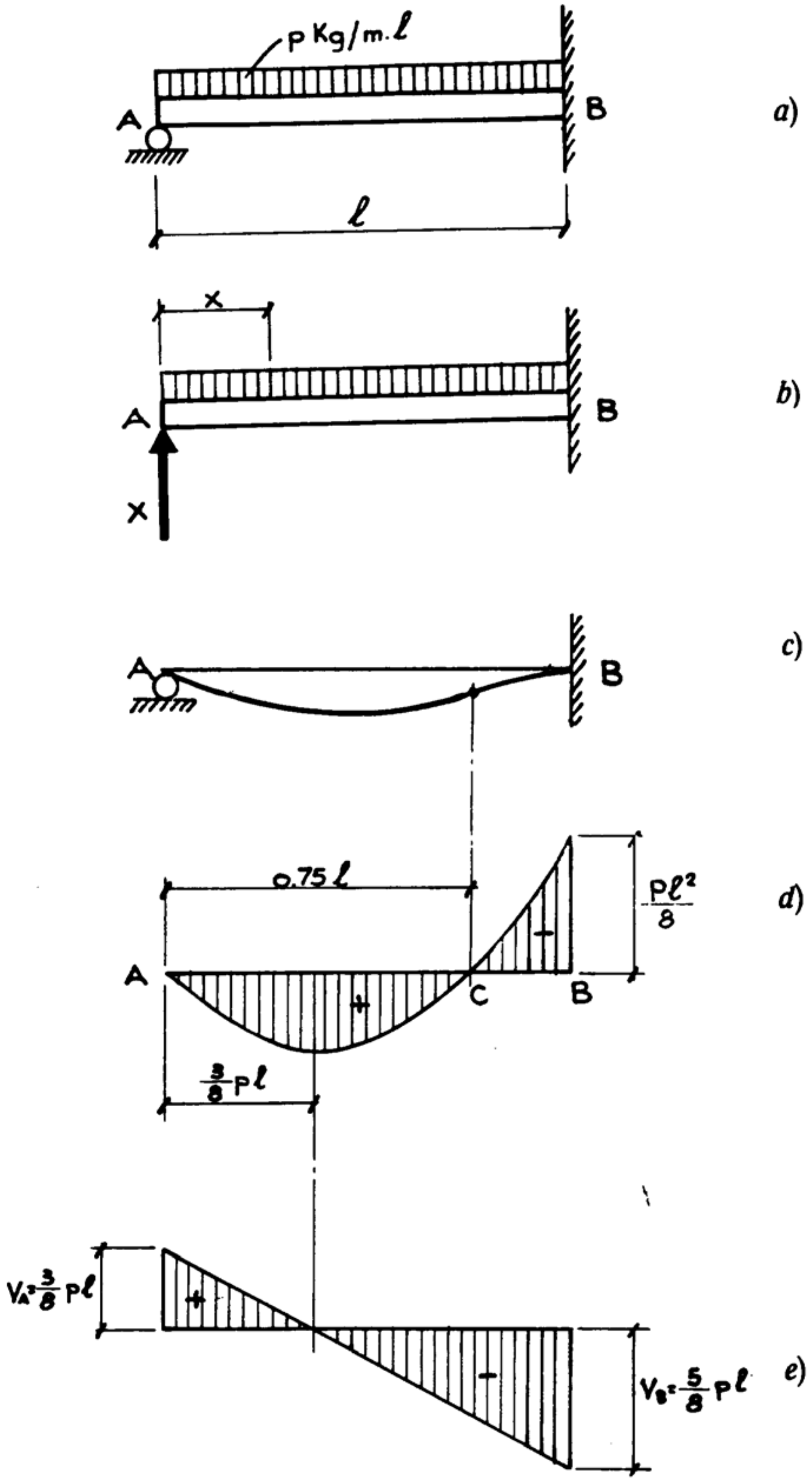
EJEMPLO de APLICACION



$$\theta = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{P \cdot l^2}{2} = \frac{P \cdot l^2}{2 \cdot E \cdot I}$$

$$\delta = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \frac{P \cdot l^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot l}{3} = \frac{P \cdot l^3}{3 \cdot E \cdot I}$$

APLICACION DE LOS TEOREMAS DE MOHR PARA LA RESOLUCION DE VIGAS HIPERESTATICAS



Incógnitas: Ecuaciones:

En A: R_A $\sum F = 0$

En B: R_B y M_B $\sum M = 0$

Resolución del sistema hiperestático:

$$M = R_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

Por el segundo teorema de Mohr: $\delta_{BA} = 0$

$$0 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l M \cdot x \cdot dx$$

$$0 = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \int_0^l \left(R_A \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} \right) \cdot x \cdot dx$$

$$0 = R_A \cdot \frac{l^3}{3} - \frac{p}{2} \cdot \frac{l^4}{4} \rightarrow R_A = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l$$

$$Q_A = R_A = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l$$

$$M = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2}$$

Para $x = l$ $$M_B = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot l - \frac{p \cdot l^2}{2} = -\frac{p \cdot l^2}{8}$$

$M = 0$ $$M = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} = 0 \rightarrow x = \frac{3}{4} \cdot l$$

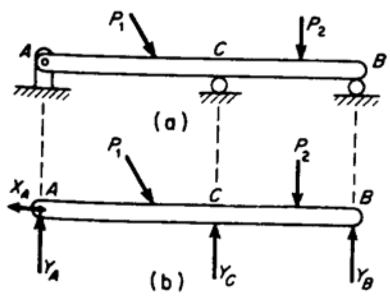
Como $Q = \frac{dM}{dx}$ $$Q = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l - p \cdot x$$

$Q = 0$ $$Q = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l - p \cdot x = 0 \rightarrow x = \frac{3}{8} \cdot l$$

$$M_{máx} = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot x - \frac{p \cdot x^2}{2} = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot l \right) - \frac{p \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot l \right)^2}{2} = \frac{9}{64} \cdot p \cdot l^2$$

METODO DE LA SUPERPOSICION

La ecuación diferencial de la elástica de una viga deformada por cargas transversales es lineal en y, así como sus derivadas. Sus soluciones para varias condiciones de carga pueden superponerse.

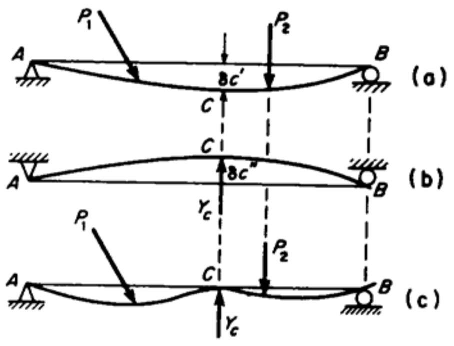


Incógnitas:

Ecuaciones:

En A:	X_A y Y_A	$\sum F_x = 0$
En B:	Y_B	$\sum F_y = 0$
En C:	Y_C	$\sum M = 0$

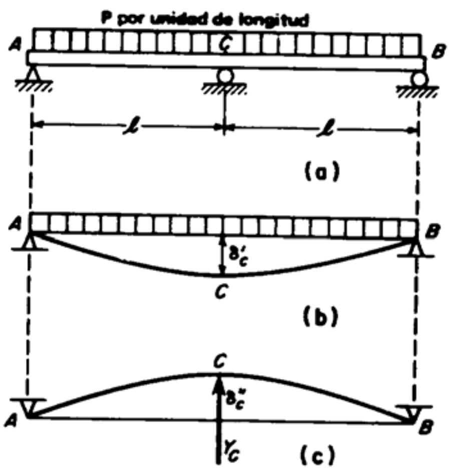
La viga es hiperestática. Para resolverla vamos a aplicar el método de superposición, considerando el rodillo C como elemento superabundante, descomponiendo el estado de cargas original en otros dos: un sistema primario AB con las cargas originarias, y un sistema AB en el que actúa únicamente la reacción Y_C.



El desplazamiento neto del punto C es: $\delta_c = \delta_c^{'} - \delta_c^{''}$

Como el apoyo C impide el desplazamiento, la condicicón anterior se transforma en: $\delta_c^{'} - \delta_c^{''} = 0$

METODO DE LA SUPERPOSICION



Elegimos el apoyo C como superabundante. Obtenemos como sistema primario una viga biapoyada con carga uniformemente repartida, de vano 2·l. El desplazamiento del punto C será (Prontuario):

$$\delta_c^{'} = \frac{5 \cdot p \cdot (2 \cdot l)^4}{384 \cdot E \cdot I} = \frac{5 \cdot p \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I}$$

El segundo estado de carga será el de una viga biapoyada de vano 2·l con una carga puntual ascendente (Y_C) en el centro del vano (Prontuario):

$$\delta_c^{'} = \frac{Y_C \cdot (2 \cdot l)^3}{48 \cdot E \cdot I} = \frac{Y_C \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I}$$

El desplazamiento neto del apoyo C será:

$$\delta_c = \delta_c^{'} - \delta_c^{''} = 0$$

$$\frac{5 \cdot p \cdot l^4}{24 \cdot E \cdot I} - \frac{Y_C \cdot l^3}{6 \cdot E \cdot I} = 0$$

$$Y_C = \frac{5}{4} \cdot p \cdot l$$

Las reacciones Y_A e Y_B pueden determinarse con facilidad:

$$\sum F_y = 0$$

$$2 \cdot p \cdot l = Y_A + Y_B + Y_C$$

$$Y_A + Y_B = 2 \cdot p \cdot l - \frac{5}{4} \cdot p \cdot l = \frac{3}{4} \cdot p \cdot l$$

$$\sum M_A = 0$$

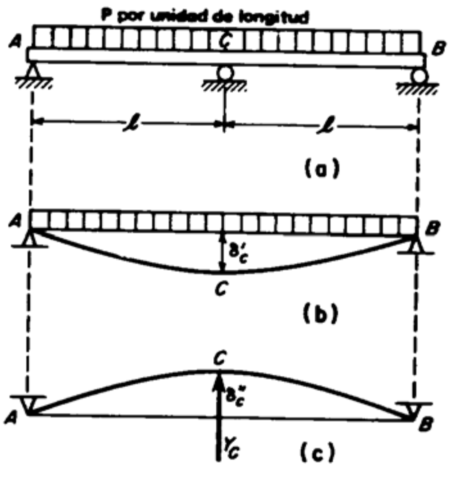
$$Y_C \cdot l + Y_B \cdot 2 \cdot l - 2 \cdot p \cdot l^2 = 0$$

$$\frac{5}{4} \cdot p \cdot l^2 + Y_B \cdot 2 \cdot l - 2 \cdot p \cdot l^2 = 0$$

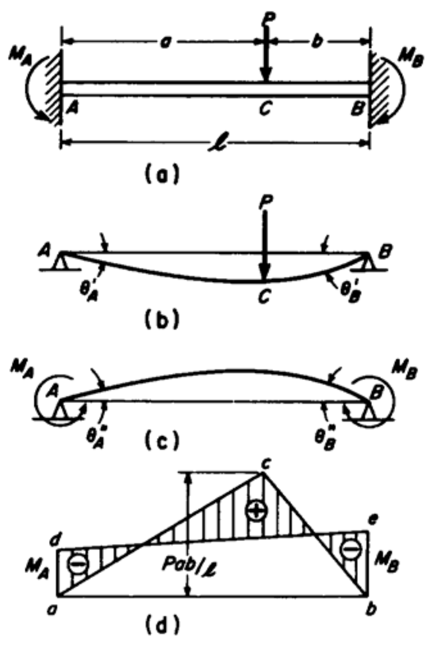
$$Y_B \cdot 2 \cdot l = 2 \cdot p \cdot l^2 - \frac{5}{4} \cdot p \cdot l^2 = \frac{3}{4} \cdot p \cdot l^2$$

$$Y_B = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l$$

$$Y_A = \frac{3}{8} \cdot p \cdot l$$



METODO DE LA SUPERPOSICION



Incógnitas:

En A: R_A y M_A

En B: R_B y M_B

Ecuaciones:

$$\sum F = 0$$

$$\sum M = 0$$

- Prontuario: Viga biapoyada con carga puntual descentrada.

$$\theta'_A = \frac{P \cdot b \cdot (l^2 - b^2)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l}$$

$$\theta'_B = \frac{P \cdot a \cdot b \cdot (2 \cdot l - b)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l}$$

- Prontuario: Viga biapoyada con momentos en los apoyos.

$$\theta''_A = \frac{M_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M_B \cdot l}{6 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta''_B = \frac{M_B \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} + \frac{M_A \cdot l}{6 \cdot E \cdot I}$$

$$\theta'_A - \theta''_A = 0$$

$$\frac{P \cdot b \cdot (l^2 - b^2)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} - \frac{M_A \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{M_B \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} = 0 \qquad (1)$$

$$\theta'_B - \theta''_B = 0$$

$$\frac{P \cdot a \cdot b \cdot (2 \cdot l - b)}{6 \cdot E \cdot I \cdot l} - \frac{M_B \cdot l}{3 \cdot E \cdot I} - \frac{M_A \cdot l}{6 \cdot E \cdot I} = 0 \qquad (2)$$

Resolviendo el sistema se determinan los valores de M_A y M_B:

$$M_A = \frac{P \cdot a \cdot b^2}{l^2}$$

$$M_B = \frac{P \cdot a^2 \cdot b}{l^2}$$

Para calcular las reacciones:

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B \cdot l + M_A - M_B - P \cdot a = 0$$

$$R_B = \frac{P \cdot a}{l} \cdot \left(\frac{l^2 + a \cdot b - b^2}{l^2} \right)$$

$$\sum M_B = 0$$

$$R_A \cdot l - M_A + M_B - P \cdot b = 0$$

$$R_A = \frac{P \cdot b}{l} \cdot \left(\frac{l^2 + a \cdot b - a^2}{l^2} \right)$$

También se pueden obtener las reacciones por superposición de los dos casos en que se ha descompuesto el sistema original.