Capítulo 1

La transformada de Laplace

1.1. Introducción

La transformada de laplace es un operador LINEAL muy útil para la resolución de ecuaciones diferenciales.

Laplace demostró cómo transformar las ecuaciones lineales NO HOMOGÉNEAS en ecuaciones algebraicas que pueden resolverse por medios algebraicos.

1.2. Conceptos básicos

Denotamos al operador de Laplace por $\mathcal{L}$, y como operador, actúa sobre una función f y devuelve otra función $\mathcal{L}[f]$

Definición 1. *La transformada de Laplace de una función $f(t)$, $0 \leq t \leq \infty$ es una función $\mathcal{L}[f]$ de una variable real s dada por:*

$$(F(s) =)\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty}\int_0^\tau f(t)e^{-st}dt \tag{1.1}$$

Está definida para todo $s \in \mathbb{R}$ donde la integral tenga sentido.

Ejemplo 1.1. *Si $f(t) = c$. Calcula su transformada de Laplace.*

$$\mathcal{L}[c](s) = \int_0^\infty ce^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty} ce^{-st}dt = \lim_{\tau\to\infty} c\left[\frac{-1}{s}e^{-st}\right]_0^\tau =$$

$$= \lim_{\tau\to\infty} c\left[\frac{-1}{s}e^{-s\tau} + \frac{1}{s}e^{-s0}\right] = 0 + \frac{c}{s} = \frac{c}{s},\ s > 0$$

observa que si $s > 0$, entonces $\lim_{\tau\to\infty} e^{-\tau s} = 0$

Ejercicio.- Comprobar las siguientes igualdades:

1. $\mathcal{L}[t](s) = \frac{1}{s^2}, \quad s > 0$
2. $\mathcal{L}[e^{at}](s) = \frac{1}{s-a}, \quad s > a$
3. $\mathcal{L}[senbt](s) = \frac{b}{s^2+b^2}, \quad s > 0$

Proposición 1. *La transformada de Laplace es lineal. Es decir, si $\mathcal{L}[g](s)$ y $\mathcal{L}[g](s)$ están definidas en un intervalo $s > s_0$, entonces también lo está $\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s)$ para cualesquiera $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.*

$$\mathcal{L}[\alpha f + \beta g](s) = \alpha\mathcal{L}[f](s) + \beta\mathcal{L}[g](s)$$

Ejemplo 1.2. *Calcula $\mathcal{L}[11 + 5e^{4t} - 6sen2t]$*

$$\mathcal{L}[11 + 5e^{4t} - 6sen2t] = \mathcal{L}[11] + \mathcal{L}[5e^{4t}] + \mathcal{L}[-6sen2t] =$$

$$= 11\mathcal{L}[1] + 5\mathcal{L}[e^{4t}] - 6\mathcal{L}[en2t] = 11\frac{1}{s} + 5\frac{1}{s-4} - 6\frac{2}{s^2+4} = \frac{11}{s} + \frac{5}{s-4} - \frac{12}{s^2+4}$$

con $s > 0$ y $s > 4 \longrightarrow s > 4$

1.3. Transformada de una derivada

Supongamos que $y'(t)$ es continua para $t \geq 0$ y que para toda $s > s_0$ (para algún s_0) se verifica que $e^{-s\tau}y(\tau) \to 0$ si $\tau \to \infty$. Entonces se tiene que:

$$\mathcal{L}[y'](s) = -y(0) + s\mathcal{L}[y](s) \tag{1.2}$$

Nota 1. *Para que la transformada sea útil, debe ser posible recuperar $f(t)$ de $\mathcal{L}[f](s)$. El operador con que haremos esto es lineal, se denota por $\mathcal{L}^{-1}$ y se denomina* ***transformada de Laplace inversa***

1.4. Problemas de valor inicial y transformadas

Consideremos el problema de valor inicial:

$$(PVI) = \begin{cases} y'(t) + ay(t) = f(t) \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

con a constante y f una función continua a trozos en $[0, +\infty)$

Supongamos que $\mathcal{L}[y'], \mathcal{L}[y]$ y $\mathcal{L}[f]$ están definidas en un INTERVALO COMÚN $s > s_0$. Para resolver la ecuación hacemos lo siguiente:

1. Aplicamos $\mathcal{L}$ a cada miembro de la Ecuación diferencial (usamos que el operador de Laplace es lineal) Resultando:

$$\mathcal{L}[y'](s) + a\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[f](s),\ \ s > s_0$$

2. Si el $\lim_{\tau\to\infty} e^{-s\tau}y(\tau) = 0$ entonces usamos la fórmula de la derivada, de manera que la ecuación anterior resulta:

$$s\mathcal{L}[y](s) - y(0) + a\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[f](s)$$

3. La ecuación anterior, es una ecuación algebraica. Despejando $\mathcal{L}[y](s)$, resulta:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{y(0)}{s+a} + \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s+a}$$

Ejemplo 1.3. *Tomemos,* $y(0) = 1$ *y* $f(t) = 4t^3e^{-at}$

Podemos calcular (usando que $\mathcal{L}[t^ne^{at}] = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$*):*

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[4t^3e^{-at}] = \frac{24}{(s+a)^4}$$

Por tanto

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{1}{s+a} + \frac{24}{(s+a)^5}$$

Debido a la linealidad de $\mathcal{L}^{-1}$ *y que* $\mathcal{L}^{-1}\big(\mathcal{L}[y]\big) = y$*, obtenemos:*

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\big[\frac{1}{s+a}\big](t) + \mathcal{L}^{-1}\big[\frac{24}{(s+a)^5}\big](t)$$

Por las tablas:

$$y(t) = e^{-at} + t^4e^{-at}$$

Ejercicio.- Resuelve el ejercicio anterior por técnicas habituales

Transformada de derivadas

Bajo ciertas condiciones sobre las funciones y sus derivadas:

$$\mathcal{L}[y''](s) = s^2\mathcal{L}[f](s) - sf(0) - f'(0)$$

y en general:

$$\mathcal{L}[y^{(n)}] = s^n\mathcal{L}[f] - s^{n-1}y(0) - s^{n-2}y'(0) - \ldots - sy^{(n-2)}(0) - y^{(n-1)}(0)$$

Veamos cómo obtener $\mathcal{L}[y'']$ a partir de $\mathcal{L}[y']$:

$$\mathcal{L}[y''] = \mathcal{L}[(y')'] = s\mathcal{L}[y'](s) - f'(0) =$$

$$= s\big(s\mathcal{L}[y](s) - y(0)\big) - y'(0) = s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0)$$

1.4.1. El método de la transformada para resolver un PVI de segundo orden

Usando lo anterior, resolver el siguiente problema de valor inicial:

$$y'' - y = 1, y(0) = 0, y'(0) = 1$$

Aplicando la transformada de Laplace a ambos lados, obtenemos:

$$\mathcal{L}[y'' - y] = \mathcal{L}[1]$$

Luego:

$$s^2\mathcal{L}[y] - sy(0) - y'(0) - \mathcal{L}[y] = \frac{1}{s}$$

Despejando, resulta:

$$\mathcal{L}[y] = \frac{sy(0) + y'(0) + \frac{1}{s}}{s^2 - 1} = \frac{1 + \frac{1}{s}}{s^2 - 1} = \frac{1}{s-1} - \frac{1}{s}, \quad s > 1$$

Por medio de la tabla, tenemos que:

$$y(t) = e^t - 1$$

Teorema 1. ***Teorema de corrimiento.*** *Bajo ciertas condiciones, se tiene que:*

$$\mathcal{L}[e^{at}f(t)](s) = \mathcal{L}[f](s-a) \tag{1.3}$$

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t)],\ a \geq 0 \tag{1.4}$$

$$\mathcal{L}[f(t)H(t-a)](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f(t+a)],\ a \geq 0 \tag{1.5}$$

donde se define $f(t) = 0$ *para* $t < 0$

Demostración.-

(1.3) se deduce directamente de la definición del operador de la transformada de laplace, de modo que al multiplicar una función en el dominio de tiempo por e^{at} se recorre la variable s de la transformada de $\mathcal{L}[f](s)$ por la cantidad a. Para demostrar la fórmula (1.4), observamos que:

$$\mathcal{L}[f(t-a)H(t-a)] = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t-a)H(t-a)dt = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t-a)dt = \int_0^{\infty} e^{-s(x+a)}f(x)dx = e^{-as}\mathcal{L}[f]$$

donde se utilizó el cambio de variable $t = x + a$ en la última integral.

Transformación de funciones escalón.

Según la fórmula (1.5) del teorema del corrimiento, tenemos que:

$$\mathcal{L}[H(t-a)] = \mathcal{L}[1 \cdot H(t-a)] = e^{-as}\mathcal{L}[1] = \frac{e^{-as}}{s},\ s > 0$$

que pudo haberse obtenido por integración directa. La transformada de $H(t-a)$ es:

$$\mathcal{L}[H(t-a)] = \int_0^{a} e^{-st}1dt + \int_a^{\infty} e^{-st}0dt = \frac{1-e^{-as}}{s},\ s > 0,\ a > 0$$

Transformada de una función a trozos lineal por partes

Calcular la transformada:

$$f(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 2-t, & \text{si } 1 \leq t < 2 \\ 0, & \text{si } 2 \leq t \end{cases}$$

Esta función la puedo escribir de la siguiente forma:

$$f(t) = (H(t) - H(t-1)) + (2-t)(H(t-1) - H(t-2)) = H(t) - (t-1)H(t-1) + (t-2)H(t-2)$$

Por tanto:

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}[H(t)] - \mathcal{L}[(t-1)H(t-1)] + \mathcal{L}[(t-2)H(t-2)] =$$

(usando el teorema de corrimiento)

$$= \frac{1}{s} - e^{-s}\frac{1}{s^2} + e^{-2s}\frac{1}{s^2} = \frac{s - e^{-s} - e^{-2s}}{s^2}, \; s > 0$$

Nota 2. *Una función $f(t)$ puedo activarse en $t = a$ si se multiplica por $H(t-a)$*