

# MODELAÇÃO DE FISSURAS EM ESTRUTURAS DE CONCRETO MEDIANTE UMA APROXIMAÇÃO DE DESCONTINUIDADES FORTES

J. Oliver<sup>1</sup>, A. E. Huespe<sup>1</sup>, M.D.G. Pulido<sup>1</sup> e E. Chaves<sup>1</sup>

## RESUMO

Apresenta-se uma breve descrição de modelos de dano contínuo, considerando-se uma cinemática que contempla a formação de descontinuidades fortes (salto no campo de deslocamentos), expressando-se também as condições de bifurcação necessárias. Deduz-se o modelo constitutivo discreto (tração-salto) induzidos pelo modelo contínuo de dano (tensão-deformação), constatando-se uma estreita relação entre a Mecânica do Contínuo e a Mecânica da Fratura nos processos de localização.

Através de uma série de exemplos expõe-se a aplicabilidade do método apresentado ao problema de fratura em materiais frágeis (particularmente em concreto), ressaltando principalmente a capacidade de descrever o avanço de uma fissura arbitrária, no processo de evolução da carga, cuja direção vem determinada pelo estado tensional de cada ponto.

## 1. INTRODUÇÃO

Uma série de trabalhos de Oliver e colaboradores [1-3], apresentam um modelo para simular numericamente o fenômeno de concentração de deformações e formação de fissuras em meios sólidos. Um dos ingredientes básicos consiste na introdução de uma cinemática que contempla campos de deslocamentos e deformações descontínuos. Esta cinemática impõe do ponto de vista numérico uma regularização adequada para parâmetros do material e dos diferentes campos —deformações, variáveis internas como deformação, etc.— que descrevem o problema. O modelo é complementado com a introdução de elementos finitos adequados para descrever a cinemática descontínua (elementos enriquecidos).

No trabalho [1] é deduzida uma série de condições que impõe, no instante do surgimento da descontinuidade, restrições ao campo de tensões. Embora tais condições não estejam explícitas no modelo constitutivo, revelam-se importantes, por que a violação das mesmas gera um comportamento anormal na resposta numérica.

Tenta-se aqui, mostrar a aplicabilidade deste modelo em problemas de fratura de materiais frágeis (particularmente em concreto), utilizando uma reposta constitutiva de dano isótropo.

---

<sup>1</sup> Universitat Politècnica de Catalunya, UPC., E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos Campus Nord, UPC, Módulo C1, Gran Capitán, s/n, 08034 Barcelona, Espanha

Por isso, o principal interesse centra-se nos exemplos numéricos que serão apresentados na segunda parte deste trabalho. Na primeira parte se apresenta, resumidamente, as características fundamentais do modelo tomando como referência os trabalhos [1-4].

## 2. MODELO CONSTITUTIVO DE DANO

Os modelos de dano têm-se mostrados úteis para simular os processos de degradação macroscópica que sofre o concreto causado pela coalescência de microfissuras. Apresentam-se a seguir duas relações constitutivas, no contexto das deformações infinitesimais, de dano contínuo e isótropo. Ambas utilizam como variável um escalar  $d$  (dano). O primeiro, representa um comportamento simétrico tanto a esforços de tração como de compressão. No segundo, a variável  $d$  só evoluciona com esforços de tração, e será denominado de modelo só tração.

### 2.1 Modelo Isótropo de dano contínuo

Seja a energia de deformação  $\varphi$  e a variável de dano  $d$  definidas como:

$$\varphi(r, \varepsilon) = (1-d)\varphi_0 \quad ; \quad d = 1 - \frac{q}{r}, \quad (1)$$

onde  $\varepsilon$  é a deformação,  $\varphi_0$  a energia de deformação do material virgem

$$\varphi_0 = \frac{1}{2} \varepsilon : \mathbb{C} : \varepsilon, \quad (2)$$

com  $\mathbb{C} = \bar{\lambda}(\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2\mu \mathbf{I}$  o tensor constitutivo elástico —  $\bar{\lambda}$  e  $\mu$  parâmetros de Lamé e  $\mathbf{1}$ ,  $\mathbf{I}$  os tensores identidade de segunda e quarta ordem, respectivamente—. O dano  $d \in [0,1]$  com a condição  $d = 0$  para o material virgem, é determinado através da variável interna  $r$ , da qual definimos sua lei de evolução e condição inicial

$$\dot{r} = \lambda \quad ; \quad r_{t=0} = r_0. \quad (3)$$

As variáveis conjugadas, a tensão  $\sigma$  e  $q$ , resultam determinadas pelas seguintes equações de estado:

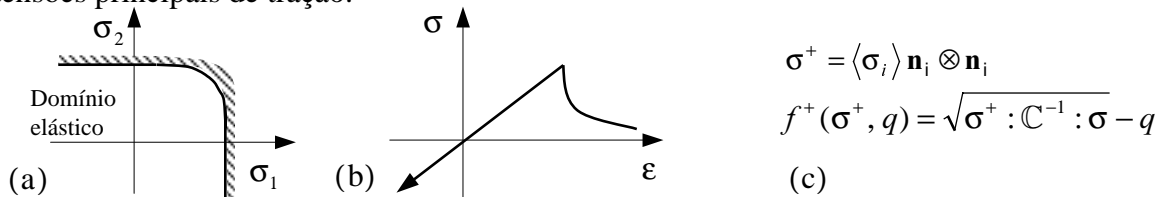
$$\sigma = \frac{q}{r} \bar{\sigma} = \frac{q}{r} \mathbb{C} : \varepsilon \quad ; \quad \dot{q} = \mathcal{H} \dot{r}. \quad (4)$$

onde  $\bar{\sigma}$  é chamada de tensão efetiva. De (4-b),  $\mathcal{H}$  cumpre a função de um módulo de endurecimento ( $\mathcal{H} > 0$ ) ou amolecimento ( $\mathcal{H} < 0$ ). O modelo fica completamente definido com as seguintes equações de complementariedade:

$$\lambda \geq 0 \quad ; \quad f(\sigma, q) = \sqrt{\sigma : \mathbb{C}^{-1} : \sigma} - q = \|\sigma\|_{\mathbb{C}^{-1}} - q \leq 0 \quad ; \quad \lambda f = 0; \quad (5)$$

### 2.2 Modelo só Tração

Este segundo modelo é derivado do anterior. A evolução de  $r$  ativa-se ( $\dot{r} > 0$ ) só com tensões principais de tração.



**Fig. 1:** Modelo só tração. **a)** Representação do domínio elástico no espaço das tensões principais ( $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ ); **b)** representação 1D da resposta ( $\sigma$ ,  $\varepsilon$ ); **c)** critério que define o domínio elástico

Com isso, tenta-se uma aproximação mais real do comportamento do concreto. As equações (1-4) e (5-a,5-c) resultam iguais para este modelo; mas a região elástica (5-b) é definida com o critério que mostra a Figura 1-c, onde  $\sigma_i$ ,  $n_i$  são as tensões principais e os autovetores do tensor de tensões respectivamente. Enquanto que a função  $\langle \bullet \rangle$  é o parêntesis

$$\text{de MacAuley: } \langle \bullet \rangle = \frac{|\bullet| + \bullet}{2}.$$

### 3. ANÁLISE DE BIFURCAÇÃO UTILIZANDO A CINEMÁTICA DE DESCONTINUIDADES FORTES

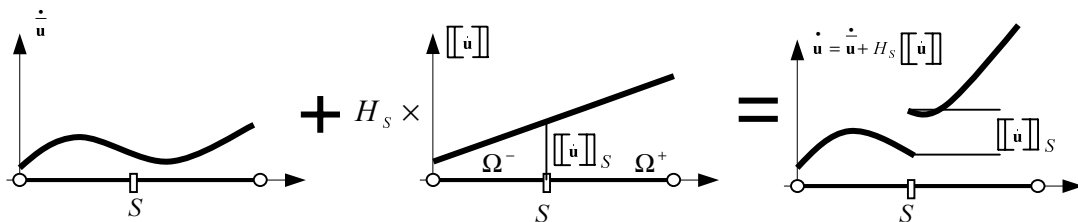
Uma das dificuldades que surgem na modelagem dos materiais com amolecimento, é a presença marcada de pontos singulares na curva de equilíbrio e que correspondem a modos de bifurcação descontínua. Este tipo de bifurcações podem ser aproveitadas para obter informação útil na descrição do fenômeno de fissuração, como por exemplo determinar o instante de início de fissura e a orientação que adota.

A essência da análise de bifurcação consiste em determinar o ponto singular da trajetória de equilíbrio e a rama secundária na qual uma solução alternativa correspondente a um modo descontínuo de deformações (bifurcação descontínua) é admissível, e determinar a suas características. Esse instante associa-se ao momento da formação de uma fissura.

Neste caso a análise pode ser realizada como se segue. Introduce-se uma cinemática com um campo de velocidades descontínuo, dado por:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) + H_S(\mathbf{x}) \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}) \quad ; \quad H_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \end{cases} ; \quad (6)$$

onde  $\dot{\mathbf{u}}$  e  $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$  são campos de velocidade contínuos e regulares, suficientemente suaves, enquanto que  $H_S$  é a função de Heaviside definida nos domínios disjuntos do corpo ( $\Omega^+$  e  $\Omega^-$ ) separados por uma superfície material  $S$ . Na Figura 2 é mostrado uma representação 1D do campo proposto. Observa-se que o segundo termo de (6) corresponde ao valor do salto do campo de velocidades em  $S$ , y cuja magnitude é  $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket(\mathbf{x}=S)$ .



**Figura 2:** Representação 1D do campo de velocidades para o modelo de descontinuidades fortes.

Neste caso  $S$  corresponde a um ponto  $\mathbf{x}$  do domínio  $\Omega$ .

A taxa de deformação associada a este campo de velocidade resulta na seguinte função generalizada:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla_{\mathbf{x}}^{sym} \dot{\mathbf{u}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_S \left( \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \mathbf{N} \right)^{sym} \quad (7)$$

Com uma parte regular  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \nabla_{\mathbf{x}}^{sym} \dot{\mathbf{u}} + H_S \nabla_{\mathbf{x}}^{sym} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$  mais outra não regular, determinada pela distribuição de Dirac ( $\delta_S$ ). A normal  $\mathbf{N}$  à superfície de descontinuidade  $S$ , resulta da derivada material generalizada da função salto.

No ponto onde é admissível a existência desta deformação, a equação de balance de forças requer que o vetor de tração  $-\mathbf{t}$  atuando sob o área cuja direção normal é  $\mathbf{N}$ , e sua taxa  $(\dot{\mathbf{t}} = \dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N})$ , seja contínua em  $S$  em sua vizinhança. Isto é: que deve verificar a equação  $[[\dot{\mathbf{t}}]] = \dot{\mathbf{t}}^+ - \dot{\mathbf{t}}_s = \mathbf{0}$ ; sendo  $\dot{\mathbf{t}}_s$  e  $\dot{\mathbf{t}}^+$  a taxa dos vetores de tração em  $S$  e no ponto imediatamente vizinho, respectivamente. Levando em consideração esta circunstância e assumindo que, no momento de se produzir a bifurcação, o tensor constitutivo do material não muda nas vizinhanças do ponto  $S$ , resulta que

$$[[\dot{\mathbf{t}}]] = \mathbf{0} = \mathbf{N} \cdot \mathbb{C}_s^d \cdot \mathbf{N} [[\dot{\mathbf{u}}]] = \mathbb{Q}_s^d [[\dot{\mathbf{u}}]] \quad (8)$$

Sendo  $\mathbb{C}_s^d$  o tensor constitutivo tangente do material e  $\mathbb{Q}_s^d$  o tensor de localização (tensor acústico). Para o material isótropo com dano apresentado na seção precedente, são definidos:

$$\mathbb{C}_s^d = \frac{q}{r} \mathbb{C} + \frac{r\mathcal{H} - q}{r^3} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}} \quad ; \quad \mathbb{Q}_s^d = \frac{q}{r} \mathbf{N} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{N} + \frac{r\mathcal{H} - q}{r^3} \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N} \otimes \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \mathbf{N} \quad (9)$$

Da equação (8), o vetor  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  resulta também o autovetor do tensor de localização associado a um autovalor nulo. Deste modo, no processo de carregamento da estrutura, surge pela primeira vez a possibilidade de bifurcação descontínua num ponto, quando o mínimo dos autovalores do tensor de localização seja nulo. Isso equivale a resolver a equação  $\det(\mathbb{Q}_s^d) = 0$  para a direção  $\mathbf{N}$  que faz máximo o  $\mathcal{H}$ ; este é justamente o aspecto a ressaltar. Sob certas condições, mas não sendo o caso geral, a direção de  $\mathbf{N}$  determinada anteriormente, a qual é normal a propagação da fissura, coincide com a direção da deformação principal máxima; critério que é normalmente adotado em outros métodos da mecânica da fratura.

### 3.1 Análise de descontinuidades fortes. Regularização e Condições de Descontinuidade Forte.

No tratamento numérico, a equação (7) deve ser regularizada. Seja o domínio  $S_h$  de espessura finita  $h$  que contém a  $S$ , define-se uma função de posição  $\mu_S$  e uma deformação regularizada

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \dot{\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}} + \frac{\mu_S}{h} \left( [[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{N} \right)^{sym} \quad ; \quad \mu_S = \begin{cases} 0 & \forall x \in \Omega / S_h \\ 1 & \forall x \in S_h \end{cases} \quad (10)$$

Para  $h \rightarrow 0$ , a cinemática recupera a característica de uma descontinuidade forte. Deste modo  $h$  atua como um parâmetro de regularização e pode ser visto como a espessura da banda  $S_h$ . Considera-se o seguinte procedimento: introduzindo um  $h \neq 0$  no momento de detectar bifurcação, faz  $h \rightarrow k$  (onde  $k \ll 1$ ) na medida que o processo evolui. Considera-se que para um tempo  $t = t_{DF}$  sendo  $t_{DF}$  o instante de início da descontinuidade forte, resulta então ser  $h = k$ .

Vejamos quais são as conseqüências que surgem na equação constitutiva depois de introduzir esta cinemática. Da integração da equação (10) no tempo, para  $t \geq t_{DF}$ , se pode obter que:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{t \geq t_{DF}} = \bar{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{\mu_S}{k} (\boldsymbol{\beta} \otimes \mathbf{N})^{sym} \quad (11)$$

O termo  $\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$  resulta da integração do primeiro termo de (10) até o tempo  $t$  mais a do segundo termo até o tempo  $t = t_{DF}$ . Enquanto que o segundo termo de (11) é a integração do segundo

termo de (10) entre  $t_{DF}$  e  $t$ , com isso:  $\beta = \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_t - \llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{t=t_{DF}}$ . É possível mostrar que  $\bar{\epsilon}$  resulta limitado.

Com a deformação no tempo  $t$ , avalia-se a tensão:

$$\sigma_S = \frac{q}{r} \mathbb{C} \left( \bar{\epsilon} + \frac{\mu_S}{k} (\beta \otimes \mathbf{N})^{sym} \right). \quad (12)$$

Por outro lado, observa-se que o vetor de tração  $\mathbf{t}_S$  é limitado no tempo, e implica que  $\sigma_S$  é limitado (ver Oliver [1]). Então a equação (12), e do fato que  $\lim_{h \rightarrow k} h \sigma_S \rightarrow \mathbf{0}$ , impõe que  $\lim_{h \rightarrow k} hr = \bar{\alpha}$  ( $0 < \bar{\alpha} < \infty$ ). Pode-se mostrar que  $r$  segue uma lei do tipo:

$$r_t = r_{DF} + \frac{\Delta\alpha}{k} \quad ; \quad \forall \quad t \geq t_{DF}; \quad (13)$$

sendo  $r(t_{DF}) = r_{DF}$  e  $\Delta\alpha$  uma variável limitada e monótona ( $\Delta\alpha(t_{DF}) = 0$ ). Da equação (13) e do fato que  $q$  é limitada ( $q \in [0, r_0]$ ), a equação (4-b) deve ser regularizada definindo um módulo de abrandamento intrínseco  $\bar{\mathcal{H}} = k\mathcal{H}$

O vetor de tração, depois de um tratamento algebraico da equação (12), resulta

$$\mathbf{t}_{t > t_{DF}} = \frac{q}{\Delta\alpha} (\mathbf{N} \cdot \mathbb{C} \cdot \mathbf{N}) \cdot \beta = \frac{q}{\Delta\alpha} \mathbb{Q}^e \cdot \beta \quad (14)$$

que é uma equação discreta "tração-salto". Obtendo  $\beta$  de (14) e substituindo em (12), obtém-se uma relação do tipo:

$$(\sigma_S)_{t > t_{DF}} = \frac{q}{\Delta\alpha} (\mathbb{C} \cdot \mathbf{N}) \beta = (\mathbb{C} \cdot \mathbf{N}) (\mathbb{Q}^e)^{-1} \mathbf{t}_S = \mathbb{M} \mathbf{t}_S = \mathbb{M} \mathbf{t} \quad ; \quad \mathbf{t} \in \mathbb{R}^3 \rightarrow \sigma_S \in \mathbb{R}^6 \quad (15)$$

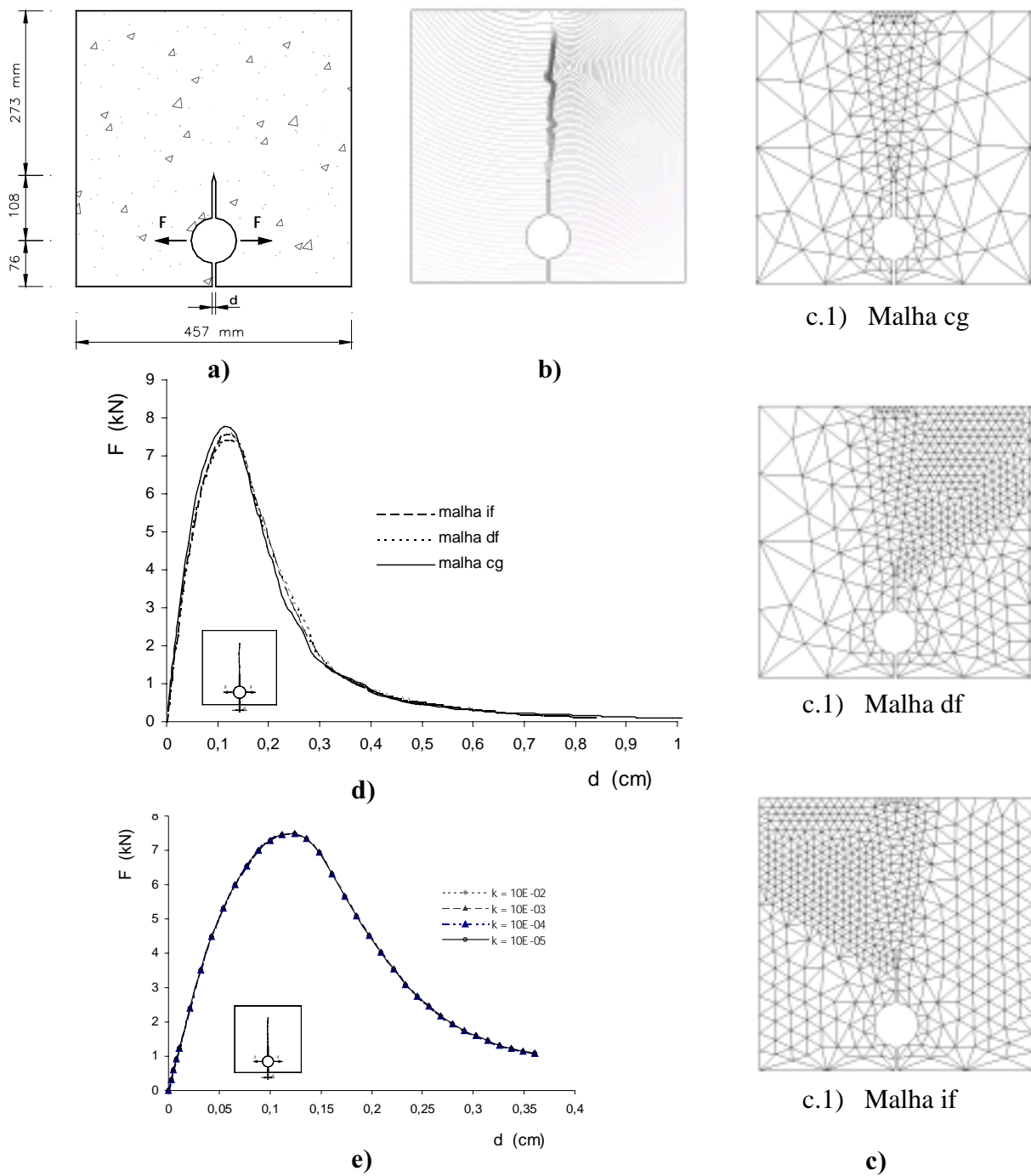
e mostra que a tensão em  $S$  é determinada pelo vetor de tração na vizinhança da descontinuidade. Esta relação resulta univocamente definida quando se acrescentam as três restrições implícitas que determinam a primeira igualdade em (15) e que são devidas à estrutura particular do tensor  $(\beta \otimes \mathbf{N})^{sym}$ . Denominamos a estas três restrições implícitas "Condições de Descontinuidade Forte" ([1]), uma vez que se devem verificar no instante de bifurcação para admitir a cinemática descrita por (6).

### 3.2 Energia de fratura. Calibragem

A energia dissipada  $W_D$  no processo de degradação do material, quando se alcança a relaxação total das tensões, é a integração no volume e no tempo da dissipação  $\mathcal{D} = \sigma \cdot \dot{\epsilon} = q \dot{r}$ . É direto mostrar que resulta  $W_D = \int_S G_f d\Omega$ , com domínio de integração na superfície  $S$ , sendo

$$G_f = -\frac{r_o^2}{2\mathcal{H}} = -\frac{f_{ct}^2}{2E\mathcal{H}} \quad (16)$$

onde  $f_{ct}$  é a máxima tensão obtida num ensaio de tração simples,  $E$  é o módulo de Young. Enfatiza-se que a equação (16) foi obtida para um módulo de amolecimento constante, assumindo que só houve dissipação na região de descontinuidade. Deste modo  $G_f$  representa a energia dissipada (ou liberada) por unidade de superfície da fissura consolidada  $S$ , o mesmo sentido dado em fratura da mecânica ao conceito de energia de fratura.



**Figura 3:** Placa com entalhe em estado plano de tensão, **a)** dimensões e cargas aplicadas, **b)** isolinhas de deslocamentos ao final do análise mostrando a concentração devido a consolidação da fissura, **c)** três malhas de elementos finitos simuladas, **d)** curvas  $F$  vs.  $d$ (apertura do extremo da entalhe) para as três malhas, **d)** curvas  $F$  vs.  $d$  para diferentes valores do parâmetro  $k$ .

A área compreendida pelas curvas força-deslocamento (ensaio uniaxial) para os casos de tensão e deformação plana, representa  $G_f$  vezes a área da fissura. Tem-se constatado que no caso de tensão plana, e como é de se esperar, não existe diferença entre as curvas reais obtida versus o valor proposto.

## 4. APLICAÇÕES NUMÉRICAS

Apresenta-se a seguir uma série de exemplos numéricos que mostra as possibilidades do método exposto para simular fissuras em modo I ou misto. Em todos os casos o material simulado corresponde ao concreto.

Com o primeiro exemplo, tenta-se mostrar a independência da resposta estrutural com uma série de parâmetros e variáveis que entram na formulação do esquema. Os outros exemplos apresentam casos conhecidos na literatura, com resultados experimentais para comparação.

Todas as simulações a seguir, tem sido obtidas com o modelo só tração. Nos resultados que se informam, quando o módulo intrínseco  $\overline{\mathcal{H}}$  é mantido constante e determinado segundo (16), a relação  $q(r)$  resulta linear, denominando-se de amolecimento linear. Por outro lado, ao adotar uma relação linear  $\overline{\mathcal{H}}(q)$  do tipo  $\overline{\mathcal{H}} = -(r_0 / G_f)q$ , resulta ser  $q$  uma função exponencial de  $r$  denominada de amolecimento exponencial.

Tem-se utilizado um esquema de continuação para o traçado da curva de equilíbrio. Observa-se em geral, em coincidência com Rots [4], que quando a fissura propaga-se em zig-zag, a curva de equilíbrio mostra pequenos “snap-back”. A sua solução detalhada, em alguns casos, resulta custosa do ponto de vista computacional.

### 4.1-a Placa plana em modo I

Foi simulada uma placa plana em estado plano de tensão, cuja geometria e condições de contorno são mostrados na Figura 3-a. Foram adotados os seguintes parâmetros do material: módulo de Young  $E = 30000.MPa$ ; módulo de Poisson  $\mu = 0.2$ ; energia de fratura  $G_f = 100.J / m^2$  e a tensão última  $f_{ct} = 3.MPa$ . A espessura da placa é  $0.0508m$

Pretende-se ressaltar em particular, a clara independência dos resultados respeito a malha de elementos finitos (tamanho do elementos e orientação da malha) utilizada e ao parâmetro  $k$  (a espessura de  $S_h$  no regime de descontinuidade forte). A Figura 3-d mostra a curva esforço vs. a abertura do extremo da entalha para três malhas: uma grossa e outras duas com refinamento em diferentes direções (Figura 3-c). A mesma relação é mostrada nas curvas da Figura 3-e para diferentes valores do parâmetro  $k$ .

A Figura 3-b apresenta iso-linhas de deslocamento total, que ilustra a trajetória da fissura consolidada, sendo o traçado, similar para todas as malhas simuladas.

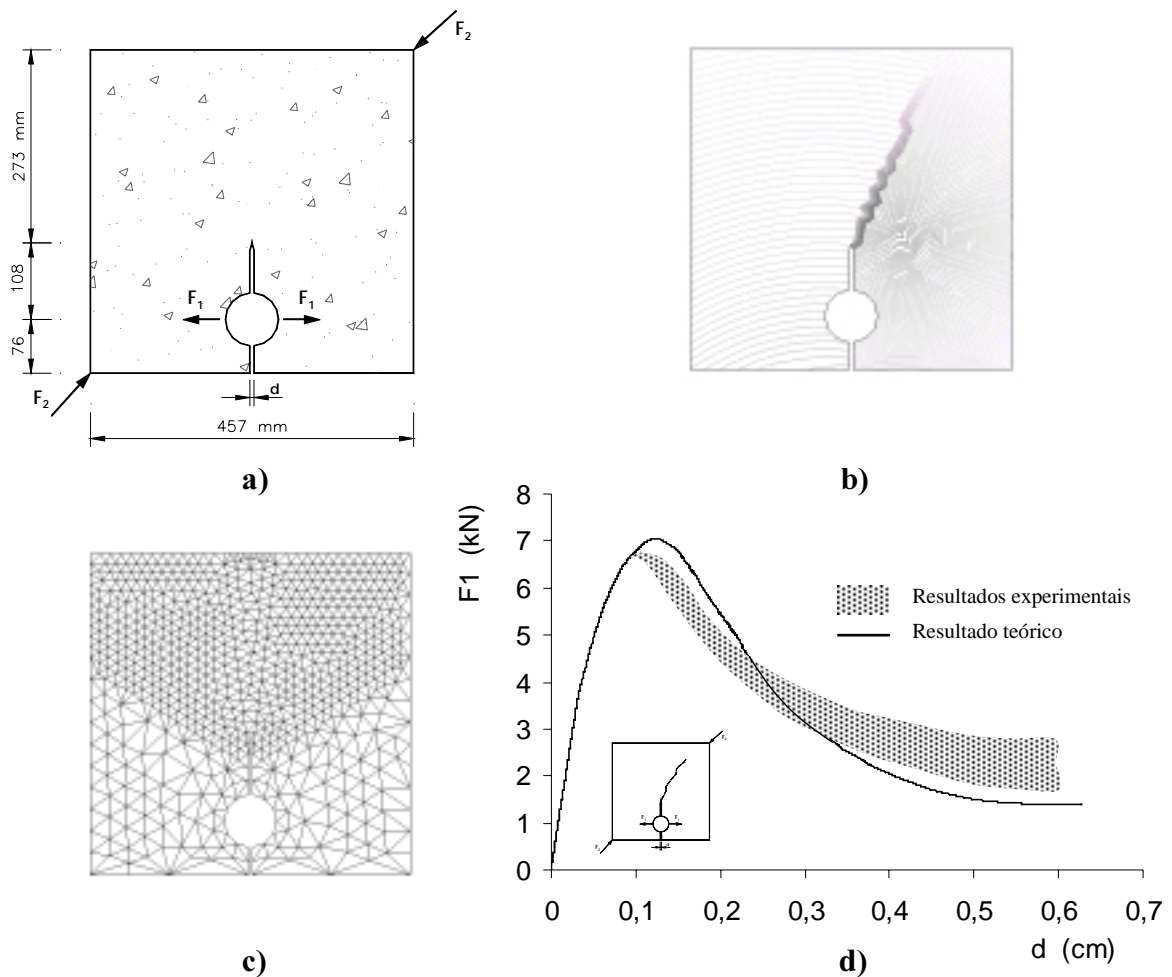
### 4.1-b Placa plana com cargas diagonais

A mesma placa do caso anterior agregando cargas  $F_2$  na diagonal (Figura 4-a), também em estado plano de tensão, mostra uma fissura que se propaga oblicuamente. A relação  $F_2 / F_1$  é aproximadamente 0.6 mantida constante, aumentando ambas monotonamente até que a força diagonal alcança 3.78kN. Posteriormente, a carga na diagonal é mantida constante e a abertura  $d$  aumentando em forma controlada.

Kobashashi e colaboradores obtiveram resultados experimentais para este teste, *apud* Rots [4] de onde foram obtidos os valores de comparação da Figura 4-d.

Aqui também, a Figura 4-d mostra que os resultados, obtidos com um abrandamento exponencial, são bem aproximados aos experimentais, embora a carga limite seja superior.

O traçado da fissura, como se observa na Figura 4-b com as iso-linhas de deslocamento total, coincide com os publicado por Rots [3].



**Figura 4:** placa sob esforços diagonais em estado plano de tensão. **a)** geometria e condições de contorno, **b)** iso-linhas de deslocamento, **c)** malha de elementos finitos, **d)** curva força vs.  $d$  (abertura do extremo da entalha)

#### 4.2-a Viga submetida a flexão

Uma viga em flexão com entalha, como se mostra na Figura 5-a, em estado plano de tensão, é apresentada a seguir. A fissura mostra uma propagação em modo I, como se observa na Figura 5-b, onde se mostra a deformada no final da análise. Os resultados da Figura 5-c foram obtidos com dois tipos de amolecimento. O correspondente ao amolecimento exponencial coincide bem com a carga limite dos resultados experimentais. Embora estes, não sejam apresentados na figura.

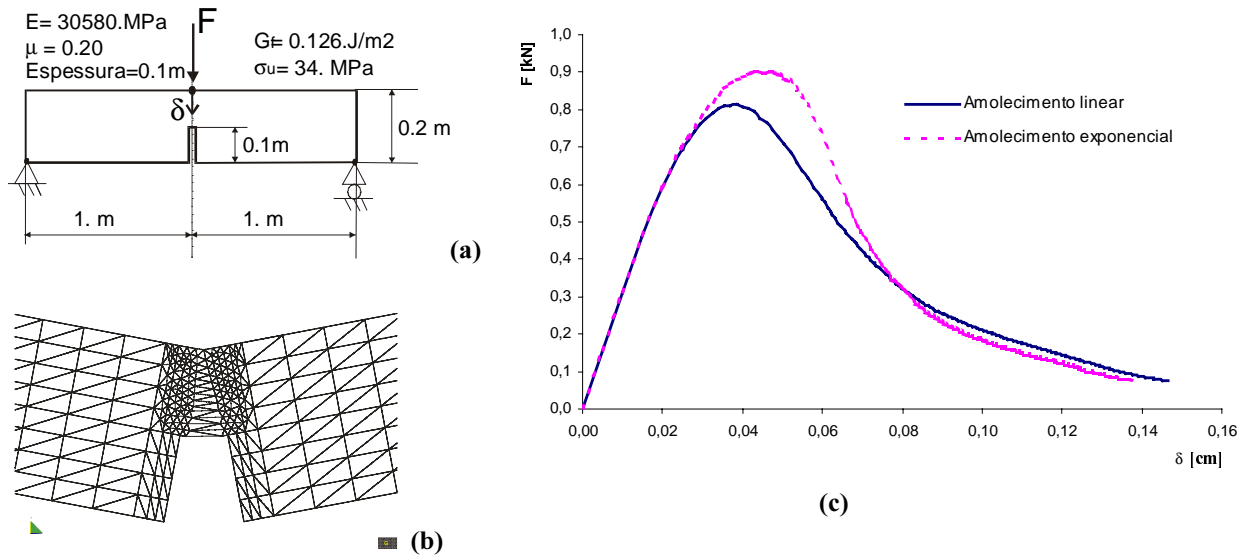
Mas para o caso de amolecimento linear, esta carga é avaliada com um valor muito alto, se bem que mostra uma flexibilidade maior no regime post-crítico.

#### 4.2-b Viga em cortante com uma entalha

Neste caso foi simulados uma viga em estado plano de tensão submetida a esforços em quatro pontos, como se apresenta na Figura 6-a. O material:  $E = 28800.MPa$ ,  $\mu = 0.18$ ,  $G_f = 100.J/m^2$  e  $f_{ct} = 2.8MPa$ , espessura  $0.156.m$ . Nos resultados experimentais, a carga

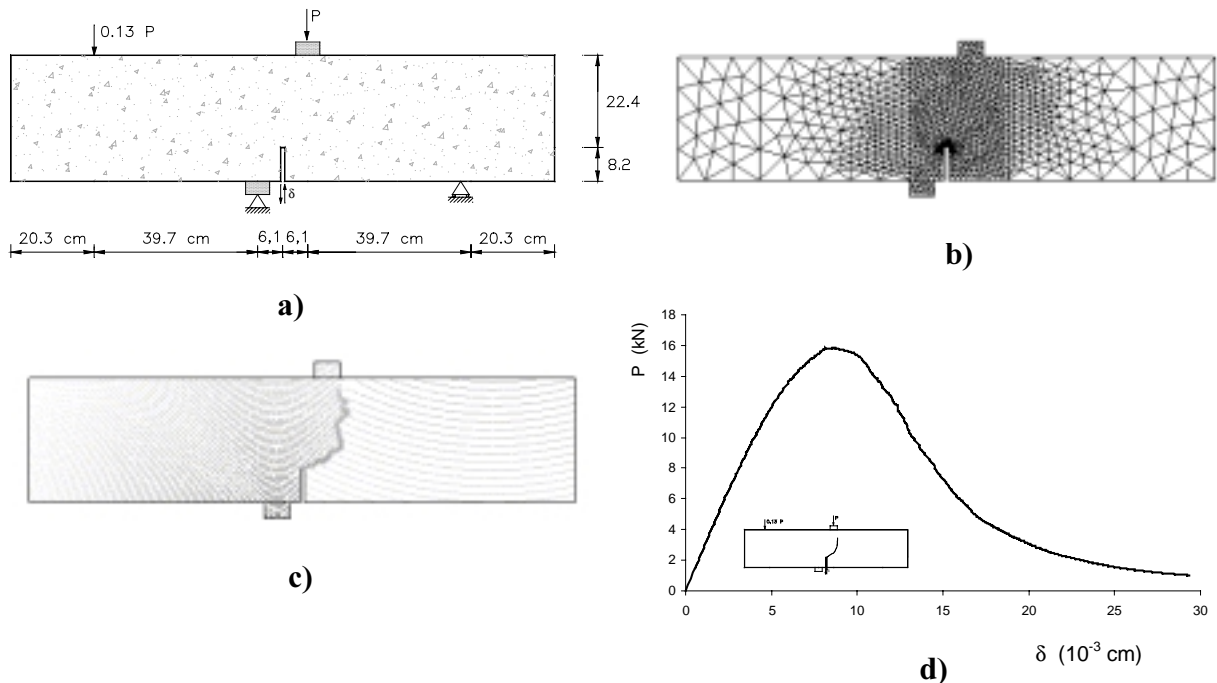


foi imposta com um sistema muito rígido de palancas segundo a análise de Arrea e colaboradores, ver os trabalhos de Bhattacharjee *et al.*[5] e de Rots[4].



**Figura 5:** viga submetida a flexão, **a)** dimensões geométricas, condições de contorno e dados, **b)** deformada, **c)** curvas esforço vs. deslocamento do ponto de aplicação da carga.

O perfil da fissura, como mostrado na Figura 6-c, como também a carga de pico mostrada utilizando amolecimento exponencial, estão em excelente acordo com os resultados experimentais.



**Figura 6:** Viga em cortante com entalha simples, **a)** modelo: geometria e cargas aplicadas, **b)** malha de elementos finitos utilizada no modelo, **c)** iso-linhas de deslocamento total que mostram a fissura consolidada, **d)** curva esforço  $P$  vs. deslocamento relativo vertical entre os pontos enfrentados da entalha ( $\delta$ ).

Ressalta-se o fato que neste caso é possível conseguir uma resistência estrutural aproximando-se a zero, como se observa na Figura 6-d que mostra a curva esforço  $F$  vs. abertura vertical do extremo da entalha. Isto implica uma separação genuína do corpo produzida pela fissura.

## 5. CONCLUSÕES

Foi apresentado um modelo que proporcionou à solução de alguns problemas de propagação de fissuras. O modelo é geral, no sentido que pode ser utilizado para simular descontinuidades fortes com outros comportamentos constitutivos, por exemplo, a modelação em materiais dúcteis de linhas de deslizamento (“*slip-lines*”). Embora aqui só mostramos a sua aplicação a fissuração do concreto.

Da formulação do modelo, foi feita uma breve introdução com o intuito de motivar a parte de aplicações. Desta primeira parte do trabalho se pretendeu salientar o conceito de condições de descontinuidade forte, no entanto, uma descrição aprofundada pode ser encontrada nas referências citadas.

Das vantagens que se considera relevante ressaltar do modelo são as seguintes:

- basicamente um modelo de contínuo permite a modelação de um fenómeno essencialmente discreto. Em particular o mesmo modelo constitutivo do contínuo é utilizado para a modelação da resposta tensão-deformação no interior da região em processo de fratura. Assim a relação discreta tração-salto de deslocamento obtida, é completamente consistente com a do contínuo;
- o elemento finito melhorado que é utilizado na simulação numérica, embora não apresentado neste trabalho (ver Oliver [6]), permite o traçado correto da fissura sem necessidade de conhecer *a priori* o mesmo. Inclusive com caminhos em zig-zag. Também não requer de remalhados, na medida que a fissura progride. Finalmente os resultados mostram-se independentes da orientação da malha respeito à direção de propagação da fissura;
- a regularização da resposta constitutiva (a introdução de um módulo de abrandamento intrínseco) resulta num esquema independente do tamanho do elemento finito.

Algumas destas vantagens foram mostradas nos exemplos apresentados na última seção deste trabalho.

## REFERÊNCIAS

- [1] Oliver, J., “On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations”, aceito para publicação em *Int. J. Solids & Struct.*
- [2] Oliver, J. and Pulido, M.D.G. “On the use of strain-softening damage constitutive equations to model cracking of concrete”. *Computational Modelling of Concrete Structures*, Euro-C 1998 Conference, Badgastein, Austria, 31 March-3 April, 1998.
- [3] Manzoli, O. “Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en la mecánica de sólidos”. *Tesis Doctoral*, Dpto. de Resistencia de Materiales y Estructuras en la Ingeniería, Universitat Politècnica de Catalunya, 1998.
- [4] Rots J.G, *Computational Modelling of Concrete Fracture*, PhD Thesis, Delft Univ. Tech., 1988.
- [5] Bhattacharjee S.S., Léger P., “Crack in concrete gravity Dams”, *J. Struct. Eng. ASCE*, Vol 120, N.4, pp.1255-1271, 1994
- [6] Oliver J “Modelling strong discontinuities in solids mechanics via strain softening constitutive equations. Part II Numerical simulation”, *Int. J. Num. Met. Eng.* vol39,3601-3623, 1996.