

## **ELEMENTOS FINITOS CON DISCONTINUIDADES INTERNAS. ESTUDIO DEL BLOQUEO DE TENSIONES Y DE SUS POSIBLES SOLUCIONES**

**J. Oliver\***, **A.E. Huespe**, **E. Samaniego**, y **E.W.V. Chaves**

\* E.T.S. Enginyers de Camins, Canals i Ports,  
Technical University of Catalonia  
Campus Nord UPC, Mòdul C1, Gran Capitán s/n  
CP.: 08034 Barcelona, Spain  
e-mail: oliver@cimne.upc.es

**Palabras clave:** Elementos finitos, discontinuidades internas, discontinuidades fuertes, elementos mixtos, deformación mejoradas supuestas.

**Resumen.** *Este trabajo aborda el estudio de algunos elementos finitos con discontinuidades internas y explora la posibilidad de obtener un elemento finito simétrico estáticamente consistente que disminuya el efecto de bloqueo de tensiones. Con este objetivo, se aplican técnicas basadas en principios variacionales mixtos y en el método de las deformaciones mejoradas supuestas al elemento simétrico de cuatro nodos básico. Se presentan, además, simulaciones numéricas que ponen de manifiesto las posibilidades que ofrecen las técnicas empleadas.*

## 1 MOTIVACIÓN

El estudio de los llamados elementos finitos con discontinuidades internas ha despertado gran interés en los últimos años. Su capacidad de introducir discontinuidades en el campo de desplazamientos dentro del dominio de un elemento (por tanto, con independencia de la orientación de sus lados) los hace especialmente atractivos para la simulación de la localización de deformaciones [5].

Existen varias familias de estos elementos. Un estudio bastante detallado de su comportamiento puede encontrarse en [2]. En dicho artículo se les clasifica en tres grupos:

1. *Elementos simétricos estáticamente consistentes*. La continuidad del vector de tensiones a través de la discontinuidad se introduce de modo que se mantenga la consistencia variacional de la formulación, obteniéndose como resultado una formulación simétrica. Sin embargo, esta forma de introducir la cinemática con discontinuidades en el campo de desplazamientos no asegura la posibilidad de movimientos de sólido rígido entre las dos partes en que queda dividido el elemento<sup>1</sup>. Una descripción de esta formulación se puede encontrar en [3].
2. *Elementos simétricos cinemáticamente consistentes*. La cinemática introducida garantiza la posibilidad de que las partes en que se ha dividido el elemento tengan movimientos de sólido rígido. Por otra parte, la condición de continuidad del vector de tensiones no queda asegurada a nivel elemental. Un elemento triangular basado en esta formulación puede encontrarse en [4].
3. *Elementos no simétricos estática y cinemáticamente consistentes*. Tanto la continuidad del vector de tensiones como la posibilidad de movimientos de sólido rígido de las partes en que queda dividido el elemento se garantizan con este elemento. Sin embargo, la primera se introduce en forma fuerte, lo cual conduce a una formulación no simétrica. Estas son las formulaciones usadas en [5] y [1].

La última familia de elementos es la que, según la experiencia de los autores, proporciona los resultados más robustos y confiables. La familia 2) tiene un comportamiento robusto también, pero con convergencia más lenta con respecto al refinamiento de la malla. Por su parte, la familia 1) tiene como gran inconveniente adolecer de efectos de bloqueo de tensiones.

A pesar de este inconveniente, la consistencia variacional de la formulación 1) y, lo que es más importante, el hecho de que los elementos de esta familia pueden ser, en principio, utilizados sin la necesidad de un algoritmo de trazado de la discontinuidad (que es fundamental para las otras dos familias, constituyendo su principal inconveniente) le confieren un atractivo especial.

Por esta razón, este trabajo se dedica a explorar y desarrollar nuevos tipos de elementos con discontinuidades internas pertenecientes a la familia 1). No obstante, y dado que el ya mencionado efecto de bloqueo de tensiones produce que la formulación básica sea inviable, se exploran algunos tratamientos específicos para afrontar este problema. Con este propósito, se

---

<sup>1</sup>Como se verá más adelante, esto derivará en un comportamiento con *bloqueo de tensiones*.

han escogido algunas técnicas basadas en principios variacionales mixtos y en el método de las deformaciones mejoradas, para su aplicación sobre el elemento básico.

## 2 EL PROBLEMA DE VALORES DE CONTORNO

Considérese el cuerpo  $\Omega$  de la figura 1-a, el cual presenta una discontinuidad en el campo de desplazamientos (incrementales)  $[[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t)$  a través de una superficie material  $\mathcal{S}$  que lo divide en  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$ , tales que  $\Omega^+ \cup \Omega^- = \Omega \setminus \mathcal{S}^2$ . Los campos de desplazamientos y de deformaciones incrementales resultantes,  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t)$ ,  $\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}, t)$ <sup>3</sup>, se pueden expresar de la siguiente manera [7]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\bar{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + \mathcal{M}_{\mathcal{S}} [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t); \\ [[\dot{\mathbf{u}}]] &= \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^+ \cap \mathcal{S}} - \dot{\mathbf{u}}|_{\mathbf{x} \in \partial\Omega^- \cap \mathcal{S}} \quad ; \quad \dot{\bar{\mathbf{u}}} = \dot{\mathbf{u}}^* \quad \text{en } \partial_u \Omega \\ \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}(\mathbf{x}, t) &= \nabla^S \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}}_{\substack{\text{regular} \\ \text{(acotado)}}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}} ([[ \dot{\mathbf{u}} ] \otimes \mathbf{n})^S}_{\substack{\text{singular} \\ \text{(no acotado)}}} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) - \varphi(\mathbf{x}) \quad ; \quad \varphi(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega) = \begin{cases} 1 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^+ \setminus \Omega_h \\ 0 & \forall \mathbf{x} \in \Omega^- \setminus \Omega_h \end{cases} \quad (2)$$

donde  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  denota el salto en desplazamientos incrementales,  $\partial_u \Omega$  es la parte del contorno exterior de  $\Omega$  (cuya normal que apunta hacia el exterior es  $\nu$ ) en que los desplazamiento se prescriben al valor  $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  es la función de salto de Heaviside situada en  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = 1 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$  y  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$ ),  $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}$  es una función de salto unidad, cuyo soporte es el dominio  $\Omega_h$ , que contiene a  $\mathcal{S}$  (véase la figura 1-(b)), y que se construye como se indica en (2), y  $\delta_{\mathcal{S}}$  es la función (generalizada) delta de Dirac ubicada en  $\mathcal{S}$  que se obtiene de derivar  $\mathcal{M}_{\mathcal{S}}(\mathbf{x})$ .

El problema cuasiestático de valores de contorno se puede describir, en forma incremental,

<sup>2</sup>Notación:  $A \setminus B$  denota el resultado de sustraer el dominio  $B$  del dominio  $A$ .

<sup>3</sup>Las expresiones que describen esta cinemática se conocen con el nombre de *cinemática de discontinuidades fuertes* [7].

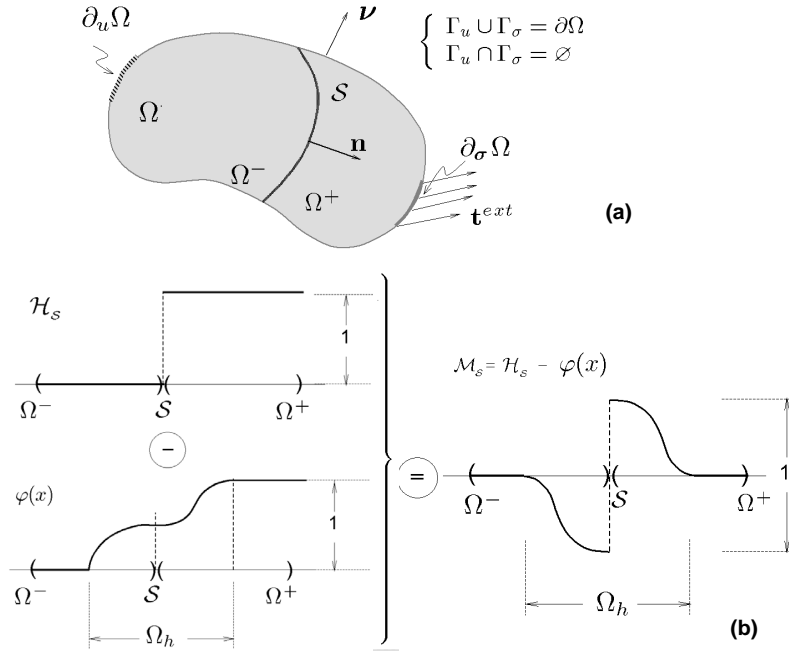


Figura 1. **a)** Sólido con discontinuidad en el campo desplazamientos; **b)** construcción de la función  $\mathcal{M}_S(\mathbf{x})$ .

como el siguiente problema de tres campos,  $\mathbf{u} - \varepsilon - \sigma$ :

$$\begin{aligned}
 \text{ENCONTRAR : } & \begin{cases} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \\ \dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) \\ \dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) \end{cases} \text{ que satisfagan:} \\
 \nabla \cdot \dot{\sigma} - \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} & \quad \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \quad (\text{equilibrio interno}) \quad (a) \\
 \dot{\varepsilon} - \nabla^S \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} & \quad \text{en } \Omega \quad (\text{compatibilidad cinemática}) \quad (b) \\
 \dot{\sigma} - \dot{\Sigma}(\varepsilon) = \mathbf{0} & \quad \text{en } \Omega \quad (\text{compatibilidad constitutiva}) \quad (c) \\
 \dot{\sigma} \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{\mathbf{t}}^{ext} & \quad \text{en } \partial_\sigma \Omega \quad (\text{equilibrio externo}) \quad (d) \\
 \underbrace{\dot{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \dot{\sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n}} = \mathbf{0} & \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (\text{continuidad externa de tracciones}) \quad (e) \\
 \stackrel{def}{=} [[\dot{\sigma}]]_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} & \\
 \underbrace{\dot{\sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} - \dot{\sigma}_S \cdot \mathbf{n}} = \mathbf{0} & \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (\text{continuidad interna de tracciones}) \quad (f) \\
 \stackrel{def}{=} [[\dot{\sigma}]]_S \cdot \mathbf{n} &
 \end{aligned} \tag{3}$$

donde  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  denota las tensiones,  $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$  son las fuerzas másicas específicas y  $\Sigma(\varepsilon)$  denota la ecuación constitutiva que, dado un estado de deformación representado por  $\varepsilon$ , proporciona como salida el estado tensional;  $\partial_\sigma \Omega$  es la parte del contorno externo de  $\Omega$  en el que las tracciones se prescriben al valor  $\mathbf{t}^{ext}$ . Las ecuaciones (3)-(e) y (3)-(f) establecen la continuidad del vector de tracciones  $\mathcal{T} = \sigma \cdot \mathbf{n}$  a través de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$ .

### 3 APROXIMACIÓN NO SIMÉTRICA (PETROV-GALERKIN)

La ecuación (3) se puede escribir en forma débil como se indica a continuación. Teniendo en cuenta el campo de desplazamientos incrementales (1), se consideran los siguientes espacios funcionales de desplazamientos incrementales,  $\mathcal{V}_{\mathbf{u}}$ , y de desplazamientos incrementales virtuales cinemáticamente admisibles,  $\bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{u}}^0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathbf{u}} &\stackrel{def}{=} \{ \eta(\mathbf{x}) = \bar{\eta} + \mathcal{M}_{\mathcal{S}} \alpha ; \bar{\eta} \in [H^1(\Omega)]^{n_{dim}} ; \alpha \in L_2(\mathcal{S}) \} \\ \bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{u}}^0 &\stackrel{def}{=} \{ \bar{\eta}^0(\mathbf{x}) \in [H^1(\Omega)]^{n_{dim}} ; \bar{\eta}^0|_{\partial_u \Omega} = \mathbf{0} \} \end{aligned} \quad (4)$$

donde  $n_{dim}$  denota el número de dimensiones del problema,  $H^1(\Omega)$  es el espacio de funciones definidas en  $\Omega$  con primeras derivadas de cuadrado integrable y  $L_2(\mathcal{S})$  el espacio de funciones de cuadrado integrable definidas en  $\mathcal{S}^4$ .

A la luz de la notación establecida, la forma débil del problema se puede escribir como:

#### PROBLEMA NO SIMÉTRICO CONTINUO

ENCONTRAR:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}} &= \dot{\bar{\mathbf{u}}} + \mathcal{M}_{\mathcal{S}} [\dot{\mathbf{u}}] ; \dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} &= \nabla^S \dot{\mathbf{u}} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_s([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^S \end{aligned} \quad (5)$$

TALES QUE:

$$\delta \Pi_u(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}; \eta) = \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\boldsymbol{\Sigma}}(\nabla^S \dot{\mathbf{u}}) : \nabla^S \eta \, d\Omega - \underbrace{\int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\mathbf{b}} \cdot \eta \, d\Omega + \int_{\partial_\sigma \Omega} \dot{\mathbf{t}} \cdot \eta \, d\Gamma}_{G_{ext}} = 0 \quad \forall \eta \in \bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{u}}^0 \quad (6)$$

Tras algunas operaciones estándar se puede establecer que la forma fuerte de (6) es:

$$\delta \Pi_u(\mathbf{u}; \eta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \dot{\boldsymbol{\Sigma}} - \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \boldsymbol{\nu} = \dot{\mathbf{t}}^{ext} & \text{en } \partial_\sigma \Omega \\ [[\dot{\boldsymbol{\Sigma}}]]_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = 0 & \text{en } \mathcal{S} \end{cases} \quad (7)$$

y queda, por tanto, por imponer la condición (3)-(f) del problema de contorno (3). Esta condición será impuesta en el problema de elementos finitos en forma fuerte. En resumen, el problema. (3) se escribe en forma equivalente como:

$$\boxed{\begin{aligned} \delta \Pi_u(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}(\dot{\bar{\mathbf{u}}}, [[\dot{\mathbf{u}}]]); \eta) = 0 & \quad \forall \eta \in \bar{\mathcal{V}}_{\mathbf{u}}^0 \quad (\text{forma variacional/débil}) \\ [[\dot{\boldsymbol{\Sigma}}_S]] \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \quad \text{en } \mathcal{S} \quad (\text{forma fuerte}) \end{aligned}} \quad (8)$$

<sup>4</sup>Grosso modo,  $H^1(\cdot)$  contiene funciones continuas definidas en  $(\cdot)$  con derivadas discontinuas y  $L_2(\cdot)$  contiene funciones discontinuas acotadas definidas en  $(\cdot)$ .

### 3.1 Discretización por elementos finitos (elemento no simétrico estándar: U4n)

Considérese el dominio material  $\Omega$  discretizado en una malla de elementos finitos de cuatro nodos<sup>5</sup> que contiene  $n_{elem}$  elementos cruzados por la discontinuidad  $\mathcal{S}$  (véase la figura 2-(a)) con sus respectivos  $n_{node}$  nodos. Supóngase que se cuenta con un algoritmo de trazado de la discontinuidad [5], el cual determina el subconjunto  $\mathcal{J}$  de los  $n_{\mathcal{J}}$  elementos que son atravesados por  $\mathcal{S}$  en un instante de tiempo dado  $t$ :

$$\mathcal{J} := \{e \mid \Omega_e \cap \mathcal{S} \neq \emptyset\} = \{e_i, \dots, e_m, \dots, e_p, \dots\} \quad (9)$$

Para cada elemento de  $\mathcal{J}$ , el algoritmo de trazado<sup>6</sup> proporciona además la posición de la interfaz de discontinuidad elemental  $\mathcal{S}_e$  (véase la figura 2-(b)), de longitud  $l_e$ , que define los dominios  $\Omega_e^+$  y  $\Omega_e^-$  y los nodos  $i^+ \in \{i_1^+, \dots, i_{n_e^+}^+\}$  y  $i^- \in \{i_1^-, \dots, i_{n_e^-}^-\}$ . Se considera, entonces, la siguiente interpolación del campo de desplazamientos incrementales  $\dot{\mathbf{u}}^{(e)}$  en el interior de un elemento dado  $e$  [5]:

$$\dot{\mathbf{u}}^{(e)}(\mathbf{x}, t) = \underbrace{\sum_{i=1}^{i=4} N_i^{(e)}(\mathbf{x}) \dot{\mathbf{d}}_i(t)}_{\dot{\mathbf{u}}^{(e)}} + \underbrace{\mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) [[\dot{\mathbf{u}}]]_e(t)}_{\dot{\mathbf{u}}^{(e)}} \quad (10)$$

donde  $\dot{\mathbf{u}}^{(e)}$  es el campo de desplazamientos incrementales estándar  $\mathcal{C}^0$ , interpolado por las funciones de forma  $\{N_1^{(e)}, N_2^{(e)}, N_3^{(e)}, N_4^{(e)}\}$  del elemento cuadrilátero isoparámetro bilineal [10], parametrizado por las velocidades nodales  $\dot{\mathbf{d}}_i(t)$  en el nodo  $i$ . El término  $\dot{\mathbf{u}}^{(e)}$ , en la ecuación (10), captura la parte discontinua del campo de desplazamientos incrementales (1) en función del salto en desplazamientos incrementales  $[[\dot{\mathbf{u}}]]_e$  y  $\mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x})$  es la versión discreta de la función de salto unitario dada en la ecuación (2) y que se define de la siguiente forma:

$$\mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0 & \forall e \notin \mathcal{J} \\ \left. \begin{array}{l} \mathcal{H}_S^{(e)}(\mathbf{x}) - \varphi^{(e)} \\ (\varphi^{(e)} = \sum_{i^+=1}^{n_e^+} N_{i^+}) \end{array} \right\} & \forall e \in \mathcal{J} \end{cases} \quad (11)$$

donde  $\mathcal{H}_S^{(e)}$  es la función de salto. La figura 2-(c) grafica la función  $\mathcal{M}_S^{(e)}$  y pone de relieve su soporte elemental.

A partir de las ecuaciones (10) y (11), el campo incremental de deformaciones se puede escribir:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(e)} = \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^{(e)} = \sum_{i=1}^{i=4} (\nabla N_i^{(e)} \otimes \dot{\mathbf{d}}_i)^S - (\nabla \varphi^{(e)} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]_e)^S + \delta_S ([[ \dot{\mathbf{u}} ] ]_e \otimes \mathbf{n})^S \quad (12)$$

Nótese que la ecuación (12) reproduce la cinemática de discontinuidades fuertes (1). A fin de evitar posibles dificultades numéricas provenientes de su manejo, la delta de Dirac  $\delta_S$  será

<sup>5</sup>De ahora en adelante, solamente se considerarán problemas bidimensionales

<sup>6</sup>Este algoritmo de trazado es un ingrediente crucial en las formulaciones no simétricas y constituye su principal inconveniente.

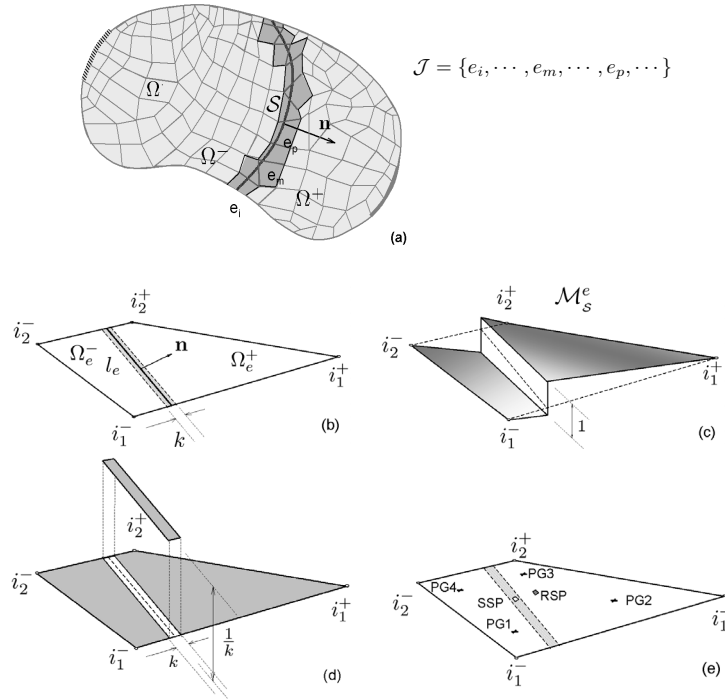


Figura 2. Discretización en 2-D usando elementos cuadriláteros: **a)** conjunto  $\mathcal{J}$  de elementos intersecados por la discontinuidad **b)** discontinuidad elemental  $S_e$ ; **c)** función  $\mathcal{M}_S$ ; **d)** delta de Dirac regularizada; **e)** puntos que intervienen en la integración numérica.

reemplazada por una función regularizada  $\delta_S^e$  definida en el dominio de un elemento  $e$  por:

$$\delta_S^{(e)} = \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} \quad (13)$$

donde  $\mu_S^{(e)}$  es una función de colocación cuyo soporte es el dominio  $S_e^k$ , ilustrado en la figura 2-(b) y definido en función del parámetro de regularización  $k$  :

$$\begin{aligned} \mu_S^{(e)}(\mathbf{x}) &= 1 \quad \forall \mathbf{x} \in S_e^k \\ \mu_S^{(e)}(\mathbf{x}) &= 0 \quad \forall \mathbf{x} \notin S_e^k \end{aligned} \quad (14)$$

A la vista de las ecuaciones (13) y (14) la forma regularizada del campo incremental de deformación es:

$$\dot{\varepsilon}^{(e)} = \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^{(e)} = \sum_{i=1}^{i=4} (\nabla N_i^{(e)} \otimes \dot{\mathbf{d}}_i)^S - (\nabla \varphi^{(e)} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]_e)^S + \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} (\mathbf{n} \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]_e)^S \quad (15)$$

A fin de integrar los términos discontinuos que surgen del segundo término del miembro derecho de la ecuación (15), además de los puntos de integración estándar del cuadrilátero bilineal (PG1 a PG4 en la figura 2-(e)), se incorpora al elemento un punto de integración adicional (SSP en la figura 2-(d)) situado en el centro del elemento y cuya área asociada es (véase la

figura 2-(d)) :

$$measure(\mathcal{S}_e^k) = kl_e \quad (16)$$

El parámetro de regularización  $k$  tiene un valor arbitrariamente pequeño (tan pequeño como lo permita la precisión del ordenador).

En este contexto, la continuidad interna del vector de tracciones en las ecuaciones(3)-(f) y (8) puede ser impuesta a nivel elemental en forma promediada:

$$\dot{\Sigma}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{n} = (\dot{\Sigma}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{n}) = \dot{\Sigma}_S \cdot \mathbf{n} \rightarrow \underbrace{\frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \dot{\Sigma} \cdot \mathbf{n} d\Omega}_{\text{valor medio sobre } \Omega \setminus S} = \underbrace{\frac{1}{l_e} \int_{S_e} \dot{\Sigma} \cdot \mathbf{n} d\Omega}_{\text{valor medio sobre } S} \Rightarrow \quad (17)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_e} \left( \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) \mathbf{n} \cdot \dot{\Sigma} d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall e \in \mathcal{J} \quad (18)$$

Considerando la discretización en elementos finitos que se acaba de describir, y utilizando procedimientos clásicos, la versión discreta del problema de valores de contorno (8) se puede escribir de la siguiente manera:

### PROBLEMA NO SIMÉTRICO DISCRETO

DADOS:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_u^h &\stackrel{def}{=} \left\{ \eta^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=n_{node}} N_i(\mathbf{x}) \eta_i + \sum_{e \in \mathcal{J}} \mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) \alpha_e \right\} \\ \bar{\mathcal{V}}_u^{h0} &\stackrel{def}{=} \left\{ \eta^{h0}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=n_{node}} N_i(\mathbf{x}) \eta_i^0 \quad ; \quad \eta_i^0|_{\partial u \Omega} = \mathbf{0} \right\} \end{aligned} \quad (19)$$

ENCONTRAR:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^h &= \sum_{i=1}^{i=n_{node}} N_i \dot{\mathbf{d}}_i + \sum_{e \in \mathcal{J}} \mathcal{M}_S^{(e)}(\mathbf{x}) [[\dot{\mathbf{u}}]]_e \quad ; \quad \dot{\mathbf{u}}^h \in \mathcal{V}_u^h \\ \dot{\varepsilon}^h &= \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h = \sum_{i=1}^{i=n_{node}} (\nabla N_i \otimes \dot{\mathbf{d}}_i)^S + \sum_{e \in \mathcal{J}} \left( [\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} \mathbf{n} - \nabla \varphi^{(e)}] \otimes [[\dot{\mathbf{u}}]]_e \right)^S \end{aligned} \quad (20)$$

TALES QUE:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_u(\dot{\Sigma}; \eta^h) &= \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} \nabla^S \eta^h : \dot{\Sigma}(\varepsilon^h) d\Omega - G_{ext} = 0 \quad \forall \eta^h \in \bar{\mathcal{V}}_u^{h0} \\ [[\dot{\Sigma}]]_S \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{0} \rightarrow \int_{\Omega_e} \left( \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) \mathbf{n} \cdot \dot{\Sigma} d\Omega = \mathbf{0} \quad \forall e \in \mathcal{J} \end{aligned} \quad (21)$$

La estructura de las ecuaciones (21) corresponde al procedimiento de residuos ponderados de Petrov-Galerkin [10] del problema de valores de contorno (3).

## 4 APROXIMACIÓN SIMÉTRICA BASADA EN DEFORMACIONES MEJORADAS SUPUESTAS

El método de las deformaciones mejoradas supuestas, que puede ser considerado como un caso particular de los métodos de deformaciones supuestas o métodos mixtos [8], proporciona una forma distinta de enfocar la existencia de discontinuidades en desplazamientos. En las secciones



que vienen a continuación, la formulación correspondiente se presenta siguiendo las pautas dadas en [9].

#### 4.1 Campos supuestos de tensiones y deformaciones

Considérese que los campos de desplazamientos  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ , de deformaciones mejoradas  $\tilde{\varepsilon}(\mathbf{x}, t)$  y de tensiones  $\sigma(\mathbf{x}, t)$  pertenecen a los siguientes espacios funcionales:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathbf{u}} &\stackrel{def}{=} \{\eta(\mathbf{x}) \in [H^1(\Omega)]^2\} \\ \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^0 &\stackrel{def}{=} \{\eta^0(\mathbf{x}) \in [H^1(\Omega)]^2 \quad ; \quad \eta^0|_{\partial u\Omega} = \mathbf{0}\} \\ \mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}} &\stackrel{def}{=} \{\tilde{\xi}(\mathbf{x}) = \bar{\xi} + \delta_S(\alpha \otimes \mathbf{n})^S \quad ; \quad \left\{ \begin{array}{l} \bar{\xi}_{ij} \in L_2(\Omega) \quad ; \quad \alpha_i \in L_2(\mathcal{S}) \\ \int_{\Omega} \tilde{\xi} : \tau \, d\Omega = 0 \quad \forall \tau \in \mathcal{V}_{\sigma} \end{array} \right. \} \\ \mathcal{V}_{\sigma} &\stackrel{def}{=} \{\tau(\mathbf{x}) \quad ; \quad \tau_{ij} \in L_2(\Omega) \} \end{aligned} \quad (22)$$

en los cuales se establece la siguiente condición de ortogonalidad de  $\mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}}$  con respecto a  $\mathcal{V}_{\sigma}$  :

$$\int_{\Omega} \tilde{\xi} : \tau \, d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{\xi} \in \mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}} \quad \forall \tau \in \mathcal{V}_{\sigma} \quad (23)$$

que está motivada por la satisfacción del *test de la parcela* [9].

El problema variacional del método de las deformaciones mejoradas se puede escribir de la siguiente manera [9]:

### PROBLEMA CONTINUO DE DEFORMACIONES MEJORADAS SUPUESTAS

ENCONTRAR:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) & \quad ; \quad \dot{\mathbf{u}} \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \quad (a) \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^S \dot{\mathbf{u}} + \underbrace{\dot{\tilde{\varepsilon}}}_{\text{mejora}} & \quad ; \quad \dot{\tilde{\varepsilon}} \in \mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}} \quad (b) \\ \dot{\tilde{\varepsilon}} = \dot{\tilde{\varepsilon}} + \delta_s(\dot{\beta} \otimes \mathbf{n})^S & \\ \dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) & \quad ; \quad \dot{\sigma} \in \mathcal{V}_{\sigma} \quad (c) \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

TALES QUE

$$\begin{aligned} \delta \Pi_u(\dot{\Sigma}; \eta) &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\Sigma}(\varepsilon) : \nabla^S \eta \, d\Omega - G_{ext} = 0 \quad \forall \eta \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^0 \quad (a) \\ \delta \Pi_{\tilde{\varepsilon}}(\tilde{\varepsilon}; \tau) &= \int_{\Omega} \tilde{\varepsilon} : \tau \, d\Omega = 0 \quad \forall \tau \in \mathcal{V}_{\sigma} \quad (b) \\ \delta \Pi_{\sigma}(\dot{\sigma}, \dot{\Sigma}; \tilde{\xi}) &= \int_{\Omega} (\dot{\sigma} - \dot{\Sigma}) : \tilde{\xi} \, d\Omega = 0 \quad \forall \tilde{\xi} \in \mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}} \quad (c) \end{aligned} \quad (25)$$

Mediante algunas operaciones estándar en (25)-(a)-(b) se puede demostrar que la correspondiente forma fuerte es:

i)

$$\delta \Pi_u(\dot{\Sigma}; \eta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \dot{\Sigma}(\varepsilon) - \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \dot{\Sigma} \cdot \nu = \dot{\mathbf{t}} & \text{en } \partial_\sigma \Omega \\ [[\dot{\Sigma}]]_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{en } \mathcal{S} \end{cases} \quad (26)$$

ii)

$$\delta \Pi_\varepsilon(\tilde{\varepsilon}; \tau) = 0 \Rightarrow \int_\Omega \dot{\tilde{\varepsilon}} : \tau \, d\Omega = 0 \Rightarrow \dot{\tilde{\varepsilon}} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (27)$$

en sentido distribucional <sup>7</sup> y, considerando la ecuación (24)-(b):

$$\dot{\varepsilon} = \nabla^S \dot{\mathbf{u}} + \underbrace{\dot{\tilde{\varepsilon}}}_{=0} = \nabla^S \dot{\mathbf{u}} \Rightarrow \boxed{\dot{\varepsilon} - \nabla^S \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega} \quad (28)$$

Por último, la ecuación (25)-(c) se puede escribir de la siguiente forma:

iii)

$$\int_\Omega (\dot{\sigma} - \dot{\Sigma}) : \tilde{\xi} \, d\Omega = \underbrace{\int_\Omega \dot{\sigma} : \tilde{\xi} \, d\Omega}_{=0} - \int_\Omega \dot{\Sigma} : \tilde{\xi} \, d\Omega = 0 \quad (29)$$

$$\Rightarrow \boxed{\int_\Omega \dot{\Sigma}(\varepsilon) : \tilde{\xi} \, d\Omega = 0} \quad (30)$$

Es evidente que las ecuaciones (25)-(a) y (25)-(b) son la forma débil de (3)-(a) a (3)-(e). Por este motivo,  $\tilde{\xi}$  en la ecuación (30) tiene que ser escogida de manera que imponga (3)-(f).

## 5 DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS. ELEMENTO ESTÁNDAR CON TENSIÓN CONSTANTE Y DEFORMACIONES SUPUESTAS: S4N.

Dada una discretización en elementos finitos mediante elementos cuadriláteros bilineales (véase figura 2-(a)), se considera la versión discreta de los espacios presentados en (22):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_u^h &\stackrel{def}{=} \{ \eta^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i(\mathbf{x}) \eta_i \} \\ \mathcal{V}_u^{h^0} &\stackrel{def}{=} \{ \eta^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i(\mathbf{x}) \eta_i \quad ; \quad \eta_i|_{\partial_u \Omega} = \mathbf{0} \} \\ \mathcal{V}_\varepsilon^h &\stackrel{def}{=} \{ \tilde{\xi}^h(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e}) \chi_e(\mathbf{x}) (\alpha_e \otimes \mathbf{n})^S \} \quad ; \quad \chi_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{para } \mathbf{x} \in \Omega_e \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases} \\ \mathcal{V}_\sigma^h &\stackrel{def}{=} \{ \tau^h(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \chi_e(\mathbf{x}) \tau_e \} \end{aligned} \quad (31)$$

Se puede apreciar inmediatamente que la expresión que se ha adoptado para  $\tilde{\xi}^h$  en (31)

<sup>7</sup>Dado que  $\dot{\tilde{\varepsilon}} = \dot{\tilde{\varepsilon}} + \delta_s(\dot{\beta} \otimes \mathbf{n})^S$  es una distribución, la expresión  $\dot{\tilde{\varepsilon}} = \mathbf{0}$  debe entenderse en sentido distribucional

cumple la condición de ortogonalidad, expresada en la ecuación(23), dado que:

$$\int_{\Omega} \tilde{\xi}^h : \tau^h d\Omega = \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e}) (\alpha_e \otimes \mathbf{n})^S : \tau_e d\Omega =$$

$$\sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \underbrace{\int_{\Omega_e} (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e}) d\Omega}_{(l_e - l_e)=0} (\alpha_e \otimes \mathbf{n})^S : \tau_e = 0 \quad (32)$$

Se tiene, entonces, que la versión discreta del problema expresado en las ecuaciones (24) y (25) tiene la siguiente forma:

### PROBLEMA DISCRETO DE DEFORMACIONES SUPUESTAS

ENCONTRAR:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x}, t) &= \sum_{i=1}^{i=n_{node}} N_i \dot{\mathbf{d}}_i ; & \dot{\mathbf{u}}^h &\in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^h \\ \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h(\mathbf{x}, t) &= \nabla^S \mathbf{u}^h + \underbrace{\sum_{e=1}^{e=n_{elem}} (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e}) \chi_e(\mathbf{x}) (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S}_{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h \text{ (mejora)}} & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h &\in \mathcal{V}_{\boldsymbol{\varepsilon}}^h \\ \dot{\boldsymbol{\sigma}}^h(\mathbf{x}, t) &= \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \chi_e(\mathbf{x}) \dot{\boldsymbol{\sigma}}_e & \dot{\boldsymbol{\sigma}}^h &\in \mathcal{V}_{\boldsymbol{\sigma}}^h \end{aligned} \quad (33)$$

TALES QUE:

i)

$$\delta \Pi_u(\dot{\boldsymbol{\Sigma}}; \eta^h) = 0 \Rightarrow \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} \nabla^S \eta^h : \dot{\boldsymbol{\Sigma}}(\boldsymbol{\varepsilon}^h) d\Omega - G_{ext} = 0 \quad \forall \eta^h \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^0 \quad (34)$$

ii)

$$\delta \Pi_{\boldsymbol{\varepsilon}}(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^h; \tau^h) = 0 \Rightarrow \text{(se cumple trivialmente, véase la ecuación (32))} \quad (35)$$

iii)

$$\delta \Pi_{\boldsymbol{\sigma}}(\dot{\boldsymbol{\sigma}}^h, \dot{\boldsymbol{\Sigma}}; \tilde{\boldsymbol{\xi}}^h) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{cases} \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} : \tilde{\boldsymbol{\xi}}^h d\Omega = \\ = \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \left[ \int_{\Omega_e} (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e}) \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{n} d\Omega \right] \cdot \alpha_e = 0 \quad \forall \alpha_e \end{cases} \quad (36)$$

$$\Rightarrow \int_{\Omega_e} (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e}) \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \mathbf{0} \quad e \in \{1 \dots n_{elem}\} \quad (37)$$

Obsérvese que la ecuación (37) puede escribirse como:

$$\int_{\Omega_e} (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k l_e} - \frac{1}{\Omega_e}) \dot{\boldsymbol{\Sigma}} \cdot \mathbf{n} d\Omega = \mathbf{0} \Rightarrow$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} d\Omega \cdot \mathbf{n}}_{\overline{\dot{\boldsymbol{\Sigma}}}_{\Omega_e} \text{ (promedio en } \Omega_e \text{)}} = \underbrace{\frac{1}{l_e} \int_{l_e} \dot{\boldsymbol{\Sigma}} dS \cdot \mathbf{n}}_{\overline{\dot{\boldsymbol{\Sigma}}}_{S_e} \text{ (promedio en } S_e \text{)}} \Rightarrow \underbrace{\overline{\dot{\boldsymbol{\Sigma}}}_{\Omega_e} \cdot \mathbf{n} = \overline{\dot{\boldsymbol{\Sigma}}}_{S_e} \cdot \mathbf{n}}_{\Sigma \text{ continuidad de tracción (en valores medios)}} \quad (38)$$

lo que pone de manifiesto que dicha ecuación (37) impone la continuidad interna de tracciones  $\Sigma \cdot \mathbf{n}$  dentro de cada elemento.

En resumen, las ecuaciones que gobiernan el problema discreto simétrico se pueden escribir como:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_u(\dot{\Sigma}; \eta^h) = 0 \\ \delta \Pi_\sigma(\dot{\sigma}^h, \dot{\Sigma}; \tilde{\xi}^h) = 0 \end{aligned} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \bigcup_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} \nabla^S \eta^h : \dot{\Sigma}(\varepsilon) d\Omega - G_{ext} = 0 \quad \forall \eta^h \in \mathcal{V}_u^0 \\ \int_{\Omega_e} (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e}) \cdot \mathbf{n} \cdot \dot{\Sigma} d\Omega = \mathbf{0} \quad e \in \{1 \dots n_{elem}\} \end{aligned}} \quad (39)$$

$$\boxed{\dot{\varepsilon}^{(e)} = \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^{(e)} + (\mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e}) (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S} \quad (40)$$

## 6 EXPERIMENTO NUMÉRICO. BLOQUEO DE TENSIONES.

A fin de evaluar el comportamiento de los elementos descritos en las secciones 3 y 5 se ha considerado el test numérico que se describe en la figura 3-(a). La placa rectangular (modelizada en deformación plana) tiene fijo uno de sus lados y se estira uniformemente por el otro. El comportamiento del material se describe mediante el modelo de dano isótropo descrito en [6], en el que se considera ablandamiento lineal. El análisis teórico arroja como resultado un línea de discontinuidad vertical que cruza la placa de arriba abajo. El salto en desplazamientos es uniforme y presenta una sola componente de la normal en coordenadas locales (modo I).

Dado que el problema es homogéneo antes de que exista bifurcación y, por tanto, el estado tensional es constante en la placa, la posición de la discontinuidad se fija artificialmente.

Para la simulación se utiliza una malla no estructurada, tal como se puede ver en la figura 3-(a), usando los siguientes elementos finitos:

- *Elemento no simétrico estándar de cuatro nodos U4n.* Este es el elemento no simétrico estática y cinemáticamente consistente de tipo Petrov-Galerkin descrito en la sección 3.
- *Elemento simétrico estándar de cuatro nodos S4n.* Este es el elemento simétrico estáticamente consistente basado en el método de las deformaciones mejoradas descrito en la sección 5.

En la figura 3-(b) se pueden observar las curvas tensión-desplazamiento,  $\sigma_{xx} - \delta$ , obtenidas para ambos elementos. Se puede constatar claramente que el elemento U4n proporciona, como cabía esperar, la solución exacta. La zona poscrítica se describe mediante una rama lineal de ablandamiento que se prolonga hasta la total relajación de tensiones.

Por otra parte, el elemento S4n exhibe una rama de endurecimiento que va más allá de la tensión límite, provocando que la curva tensión-desplazamiento alcance niveles incompatibles con la física del problema.

La causa de este bloqueo se explica, a grandes rasgos, mediante los siguientes razonamientos:

1. La cinemática de discontinuidades fuertes descrita en (1) descompone las deformaciones (incrementales) en una parte regular (acotada) que se desarrolla en  $\Omega \setminus \mathcal{S}$  y una singular (no

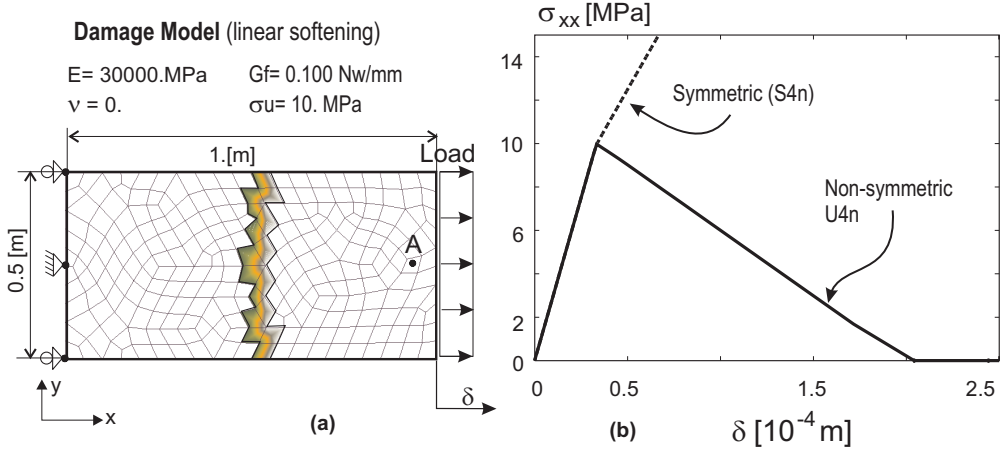


Figura 3. Placa homogénea: **a)** datos geométricos y malla de elementos finitos; **b)** curvas de tensión  $\sigma_{xx}$  - desplazamiento  $\delta$  en el punto A.

acotada) que se desarrolla en  $\mathcal{S}$ .

$$\dot{\epsilon} = \nabla^S \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\dot{\bar{\epsilon}}}_{\substack{\dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \\ \text{regular (acotada)}}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}} ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^S}_{\text{singular (no acotada)}} \quad (41)$$

- Se puede demostrar que, después del inicio de la discontinuidad fuerte, toda la componente inelástica de las deformaciones (incrementales) corresponde a la parte singular, mientras que las deformaciones regulares (acotadas) son incrementalmente elásticas<sup>8</sup>, esto es:

$$\dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \dot{\bar{\epsilon}} = \underbrace{\mathbf{C}^{-1} : \dot{\sigma}}_{\text{deformación elástica}} \Rightarrow \dot{\sigma} = \mathbf{C} : \dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \quad (42)$$

donde  $\mathbf{C}$  denota el tensor constitutivo elástico de cuarto orden.

- De la ecuación (42) se puede ver que, ya que las componentes de  $\mathbf{C}$  (que vienen determinadas por los valores, generalmente, elevados de las propiedades elásticas) tienen valores muy altos, los valores de  $\dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$  tienen que ser muy pequeños, de modo que  $\dot{\sigma}$  se mantenga en un rango de valores físicamente aceptables. Dicho de otra manera, si los valores de  $\dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$  son inusualmente altos, lo serán también los valores de  $\dot{\sigma}$ , con la consecuente aparición de *efectos de bloqueo*. En el caso de la curva de la figura 3-b, cabría esperar que las deformaciones regulares fueran prácticamente cero<sup>9</sup>.

$$\dot{\sigma} \simeq 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\epsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \mathbf{C}^{-1} : \dot{\sigma} \simeq 0} \quad (43)$$

Considérese ahora el campo de deformaciones modelizado por el elemento  $S4n$  (véase la

<sup>8</sup>Aunque es intuitivo, este no es un resultado trivial. Probarlo requiere recurrir al llamado análisis de discontinuidades fuertes ([6]).

<sup>9</sup>En este punto el elemento debería ser capaz de producir movimientos de sólido rígido entre las dos partes en las que queda dividido por la discontinuidad.

ecuación (33)) y el grado polinómico de sus componentes:

$$\dot{\varepsilon}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{(e)} = \underbrace{\nabla^S \dot{\mathbf{u}}^{(e)}}_{\text{lineal}} - \underbrace{\frac{l_e}{\Omega_e} (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S}_{\text{(mejorado) constante}} \quad (44)$$

Es inmediato ver que, excepto para casos muy particulares en los cuales el término  $\nabla^S \dot{\mathbf{u}}^{(e)}$  se hace constante dentro del elemento, los términos no se pueden cancelar entre sí. En consecuencia, la ecuación (43) no será satisfecha y aparecerá el efecto de bloqueo de tensiones.

Estos razonamientos, además de explicar las causas del bloqueo del elemento S4n, sugieren dos posibles soluciones:

- Disminuir el grado polinómico de  $\nabla^S \dot{\mathbf{u}}^{(e)}$  a cero (constante).
- Incrementar el grado polinómico del término de mejora a uno (polinomio lineal).

La estrategia a) se sigue en el caso de los elementos mixtos de la sección 7 mientras que la estrategia b) conduce a la estrategia de mejoramiento de deformaciones presentada en la sección 9.

## 7 APROXIMACIÓN MIXTA

### 7.1 Campos supuestos de deformaciones y tensiones

Considérense los siguientes espacios funcionales:

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_{\mathbf{u}} &\stackrel{def}{=} \{\eta(\mathbf{x}) \in [H^1(\Omega)]^2\} & (a) \\ \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^0 &\stackrel{def}{=} \{\eta^0(\mathbf{x}) \in [H^1(\Omega)]^2 \ ; \ \eta^0|_{\partial_u \Omega} = \mathbf{0}\} & (b) \\ \mathcal{V}_{\varepsilon} &\stackrel{def}{=} \{\xi(\mathbf{x}) = \bar{\xi} + \delta_S(\alpha \otimes \mathbf{n})^S \ ; \ \bar{\xi}_{ij} \in L_2(\Omega) \ ; \ \alpha_i \in L_2(\mathcal{S})\} & (c) \\ \mathcal{V}_{\sigma} &\stackrel{def}{=} \{\tau(\mathbf{x}) \ ; \ \tau_{ij} \in L_2(\Omega) \ ; \ [[\tau]]_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = [[\tau]]_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0}\} & (d) \end{aligned} \quad (45)$$

El problema variacional de tres campos ( $\mathbf{u} - \varepsilon - \sigma$ ) puede escribirse como:

### PROBLEMA CONTINUO MIXTO

ENCONTRAR:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) & & \dot{\mathbf{u}} &\in \mathcal{V}_{\mathbf{u}} \\ \dot{\varepsilon}(\mathbf{x}, t) &= \dot{\bar{\varepsilon}} + \delta_S(\dot{\beta} \otimes \mathbf{n})^S & \dot{\varepsilon} &\in \mathcal{V}_{\varepsilon} \\ \dot{\sigma}(\mathbf{x}, t) & & \dot{\sigma} &\in \mathcal{V}_{\sigma} \end{aligned} \quad (46)$$

TALES QUE

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\mathbf{u}}(\dot{\sigma}; \eta) &= \int_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \dot{\sigma} : \nabla^S \eta \, d\Omega - G_{ext} = 0 & \forall \eta \in \mathcal{V}_{\mathbf{u}}^0 \\ \delta \Pi_{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\varepsilon}; \tau) &= \int_{\Omega} (\dot{\varepsilon} - \nabla^S \dot{\mathbf{u}}) : \tau \, d\Omega = 0 & \forall \tau \in \mathcal{V}_{\sigma} \\ \delta \Pi_{\sigma}(\dot{\sigma}, \dot{\Sigma}; \xi) &= \int_{\Omega} (\dot{\sigma} - \dot{\Sigma}) : \xi \, d\Omega = 0 & \forall \xi \in \mathcal{V}_{\varepsilon} \end{aligned} \quad (47)$$

Tras el procedimiento estándar las expresiones (47) conducen a la siguiente forma fuerte:

i)

$$\delta \Pi_u(\dot{\sigma}; \eta) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \nabla \cdot \dot{\sigma} - \dot{\mathbf{b}} = \mathbf{0} & \text{en } \Omega \setminus \mathcal{S} \\ \dot{\sigma} \cdot \nu = \dot{\mathbf{t}} & \text{en } \partial_\sigma \Omega \\ [[\dot{\sigma}]]_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{0} & \text{en } \mathcal{S} \end{cases} \quad (48)$$

ii)

$$\delta \Pi_\varepsilon(\dot{\mathbf{u}}, \dot{\varepsilon}; \tau) = 0 \Rightarrow \int_\Omega (\dot{\varepsilon} - \nabla^S \dot{\mathbf{u}}) : \tau \, d\Omega = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\varepsilon} = \nabla^S \dot{\mathbf{u}} \quad \text{en } \Omega} \quad (49)$$

iii)

$$\delta \Pi_\sigma(\dot{\sigma}, \dot{\Sigma}; \xi) = 0 \Rightarrow \int_\Omega (\dot{\sigma} - \dot{\Sigma}) : \xi \, d\Omega \Rightarrow \boxed{\dot{\sigma} = \dot{\Sigma} \quad \text{en } \Omega} \quad (50)$$

Por tanto, las ecuaciones (3)-(a) a (3)-(e) del problema de valores de contorno original se cumplen en forma débil mediante las ecuaciones variacionales (47) mientras que la ecuación (3)-(f) se cumple debido a la particular elección del espacio  $\mathcal{V}_\sigma$  en la ecuación (45)-(d).

## 8 DISCRETIZACIÓN POR ELEMENTOS FINITOS. ELEMENTO MIXTO EN TENSIÓN/DEFORMACIÓN CONSTANTE: M4N

Para la discretización con elementos de cuatro nodos presentada en la figura 2-(a) se considera la siguiente versión discreta de los espacios de la ecuación (45):

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_u^h &\stackrel{def}{=} \{ \eta^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i(\mathbf{x}) \eta_i \} & (a) \\ \mathcal{V}_u^0 &\stackrel{def}{=} \{ \eta^h(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i(\mathbf{x}) \eta_i \quad ; \quad \eta_i|_{\partial u \Omega} = \mathbf{0} \} & (b) \\ \mathcal{V}_\varepsilon^h &\stackrel{def}{=} \{ \xi^h(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \chi_e(\mathbf{x}) (\bar{\xi}_e + \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} (\alpha_e \otimes \mathbf{n})^S) \}; \chi_e(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{para } x \in \Omega_e \\ 0 & \text{en caso} \\ & \text{contrario} \end{cases} & (c) \\ \mathcal{V}_\sigma^h &\stackrel{def}{=} \{ \tau^h(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{n_{elem}} \chi_e(\mathbf{x}) \tau_e \} & (d) \end{aligned} \quad (51)$$

y el correspondiente problema discreto:

### PROBLEMA DISCRETO MIXTO

ENCONTRAR:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{u}}^h &= \sum_{i=1}^{n_{node}} N_i \dot{\mathbf{d}}_i \quad ; & \dot{\mathbf{u}}^h &\in \mathcal{V}_u^h & (a) \\ \dot{\varepsilon}^h &= \sum_{e=1}^{n_{elem}} (\chi_e(\mathbf{x}) \dot{\varepsilon}_e + \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} \chi_e(\mathbf{x}) (\beta_e \otimes \mathbf{n})^S) & \dot{\varepsilon}^h &\in \mathcal{V}_\varepsilon & (b) \\ \dot{\sigma}^h &= \sum_{e=1}^{n_{elem}} \chi_e(\mathbf{x}) \dot{\sigma}_e & \dot{\sigma}^h &\in \mathcal{V}_\sigma & (c) \end{aligned} \quad (52)$$

TALES QUE:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_u(\dot{\sigma}; \eta^h) &= \int_{\Omega} \dot{\sigma}^h : \nabla^S \eta^h d\Omega - G_{ext} = 0 \quad \forall \eta^h \in \mathcal{V}_u^{h0} \quad (a) \\ \delta \Pi_{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^h, \dot{\varepsilon}^h; \tau^h) &= \int_{\Omega} (\dot{\varepsilon}^h - \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h) : \tau^h d\Omega = 0 \quad \forall \tau^h \in \mathcal{V}_{\sigma}^h \quad (b) \\ \delta \Pi_{\sigma}(\dot{\sigma}^h, \dot{\Sigma}^h; \xi^h) &= \int_{\Omega} (\dot{\sigma}^h - \dot{\Sigma}^h) : \xi^h d\Omega = 0 \quad \forall \xi^h \in \mathcal{V}_{\varepsilon}^h \quad (c) \end{aligned} \quad (53)$$

Si se inserta  $\dot{\varepsilon}^h$  de la ecuación (52)-(b) en la ecuación (53)-(b) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^h, \dot{\varepsilon}^h) &= 0 \Rightarrow \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\dot{\varepsilon}^h - \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h) : \tau_e d\Omega = \\ &= \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \left( \Omega_e \dot{\bar{\varepsilon}}_e + l_e (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S - \int_{\Omega_e} \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h d\Omega \right) : \tau_e = 0 \quad \forall \tau_e \Rightarrow \\ &\Rightarrow \left( \Omega_e \dot{\bar{\varepsilon}}_e + l_e (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S - \int_{\Omega_e} \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h d\Omega \right) = 0 \quad e \in \{1 \dots n_{elem}\} \Rightarrow \end{aligned} \quad (54)$$

despejando  $\dot{\bar{\varepsilon}}_e$  y sustituyendo en la ecuación (54) y, luego, sustituyendo en  $\dot{\varepsilon}^h$  en la ecuación (52)-(b):

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\varepsilon}}_e &= \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h d\Omega - \frac{l_e}{\Omega_e} (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S \quad e \in \{1 \dots n_{elem}\} \Rightarrow \\ \dot{\varepsilon}^h &= \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \chi_e(\mathbf{x}) \left( \underbrace{\frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h d\Omega}_{\stackrel{def}{=} \overline{\nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h}^{(e)}} - \left( \frac{l_e}{\Omega_e} - \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} \right) (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S \right) \end{aligned} \quad (55)$$

donde  $\overline{\nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h}^{(e)}$  denota el valor medio de  $\nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h(\mathbf{x})$  dentro del elemento  $e$ . En resumen:

$$\delta \Pi_{\varepsilon}(\dot{\mathbf{u}}^h, \dot{\varepsilon}^h; \tau^h) = 0 \rightarrow \boxed{\dot{\varepsilon}^h = \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \chi_e(\mathbf{x}) \left[ \overline{\nabla^S \dot{\mathbf{u}}^h}^{(e)} + \left( \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S \right]} \quad (56)$$

Ahora bien, a partir de la ecuación (53)-(c) y del desarrollo de  $\xi^h(\mathbf{x})$  en la ecuación (51)-(c) se obtiene:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_{\sigma}(\dot{\sigma}^h, \dot{\Sigma}^h; \xi^h) &= 0 \Rightarrow \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\dot{\sigma}_e - \dot{\Sigma}) : \xi^h d\Omega = \\ &= \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} (\dot{\sigma}_e - \dot{\Sigma}) : \left( \bar{\xi}_e + \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} (\alpha_e \otimes \mathbf{n})^S \right) d\Omega = \\ &= \sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \left( \left[ \Omega_e \dot{\sigma}_e - \int_{\Omega_e} \dot{\Sigma} d\Omega \right] : \bar{\xi}_e + \left[ l_e \dot{\sigma}_e \cdot \mathbf{n} - \int_{S_e} \dot{\Sigma} \cdot \mathbf{n} dS \right] \cdot \alpha_e \right) = 0 \\ &\quad \forall \bar{\xi}_e \quad \forall \alpha_e \end{aligned} \quad (57)$$



$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} \left[ \Omega_e \dot{\sigma}_e - \int_{\Omega_e} \dot{\Sigma} d\Omega \right] = 0 \\ \left[ l_e \dot{\sigma}_e \cdot \mathbf{n} - \int_{\mathcal{S}_e} \dot{\Sigma} d\mathcal{S} \cdot \mathbf{n} \right] \end{aligned} \right\} e \in \{1 \dots n_{elem}\} \quad (58)$$

Despejando, entonces,  $\dot{\sigma}_e$  en la ecuación (58):

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_e &= \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \dot{\Sigma} d\Omega = \overline{\dot{\Sigma}_{\Omega_e}} \quad (a) \\ \dot{\sigma}_e \cdot \mathbf{n} &= \frac{1}{l_e} \int_{\mathcal{S}_e} \dot{\Sigma} d\mathcal{S} \cdot \mathbf{n} = \overline{\dot{\Sigma}_{\mathcal{S}}} \cdot \mathbf{n} \quad (b) \end{aligned} \quad (59)$$

donde  $\overline{\dot{\Sigma}_{\Omega_e}} = \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \dot{\Sigma} d\Omega$  y  $\overline{\dot{\Sigma}_{\mathcal{S}}} = \frac{1}{l_e} \int_{\mathcal{S}_e} \dot{\Sigma} d\mathcal{S}$  son, respectivamente, los valores medios de  $\dot{\Sigma}(\varepsilon(\mathbf{x}))$  in  $\Omega_e$  and  $\mathcal{S}_e$ . A partir de la ecuación (59), es trivial obtener

$$\overline{\dot{\Sigma}_{\Omega_e}} \cdot \mathbf{n} = \overline{\dot{\Sigma}_{\mathcal{S}}} \cdot \mathbf{n} \quad (60)$$

que es la expresión de la continuidad interna del vector de tensiones (3)-(f) en función de los valores medios de  $\dot{\Sigma}$ . La ecuación (59)-(b) puede, entonces, escribirse en un formato más conveniente:

$$\frac{1}{l_e} \int_{\mathcal{S}_e} \dot{\Sigma} d\mathcal{S} \cdot \mathbf{n} - \frac{1}{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \dot{\Sigma} d\Omega \cdot \mathbf{n} = \int_{\Omega_e} \left( \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) \dot{\Sigma} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0 \quad (61)$$

En resumen, a partir de las ecuaciones (57) y (61) se llega a:

$$\delta \Pi_\sigma(\dot{\sigma}^h, \dot{\Sigma}; \xi^h) = 0 \rightarrow \boxed{\int_{\Omega_e} \left( \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) \dot{\Sigma} \cdot \mathbf{n} d\Omega = 0 \quad \forall e \in \{1 \dots n_{elem}\}} \quad (62)$$

Por último, después de algunas operaciones algebraicas estándar en la ecuación(53)-(a), y teniendo en cuenta (59), se llega a:

$$\begin{aligned} \delta \Pi_u(\dot{\sigma}^h; \eta^h) &= 0 \rightarrow \bigcup_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} \dot{\sigma}_e : \nabla^S \eta^h d\Omega - G_{ext} = \\ &= \bigcup_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} \overline{\dot{\Sigma}_{\Omega_e}} : \nabla^S \eta^h d\Omega - G_{ext} = \\ &= \bigcup_{e=1}^{e=n_{elem}} \overline{\dot{\Sigma}_{\Omega_e}} : \underbrace{\int_{\Omega_e} \nabla^S \eta^h d\Omega}_{= \Omega_e \overline{\nabla^S \eta}^{(e)}} - G_{ext} = \\ &= \bigcup_{e=1}^{e=n_{elem}} \underbrace{\Omega_e \overline{\dot{\Sigma}_{\Omega_e}}}_{\int_{\Omega_e} \dot{\Sigma} d\Omega} : \overline{\nabla^S \eta}^{(e)} - G_{ext} = 0 \Rightarrow \end{aligned} \quad (63)$$

$$\Rightarrow \boxed{\sum_{e=1}^{e=n_{elem}} \int_{\Omega_e} \overline{\nabla^S \eta^h} : \dot{\Sigma}(\varepsilon^h) d\Omega - G_{ext} = 0 \quad \forall \eta^h \in \mathcal{V}_u^0} \quad (64)$$

## 9 MEJORA DE DEFORMACIONES: ELEMENTO E4N

La estrategia estudiada a continuación se basa en dotar de nuevos términos a la componente de deformaciones mejoradas ( $\dot{\tilde{\varepsilon}}$  en la ecuación (24)) del elemento simétrico S4n. Se deben satisfacer dos condiciones:

i) La condición de ortogonalidad (23) :

$$\int_{\Omega} \dot{\tilde{\varepsilon}} : \tau d\Omega = 0 \quad \forall \dot{\tilde{\varepsilon}} \in \mathcal{V}_{\tilde{\varepsilon}} \quad \forall \tau \in \mathcal{V}_{\sigma} \quad (65)$$

ii) Incluir términos de orden uno que contribuyan a disminuir el efecto de bloqueo de tensiones.

Teniendo presentes estas condiciones, se propone el siguiente campo de deformaciones de mejora:

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^h{}^{(e)} = \underbrace{\left( \mu_s^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S}_{\dot{\tilde{\varepsilon}}_1^{(e)}} + \underbrace{\frac{1}{J} s \dot{\mathbf{S}}_e + \frac{1}{J} t \dot{\mathbf{T}}_e}_{\dot{\tilde{\varepsilon}}_2^{(e)}} \quad (66)$$

donde  $s$  y  $t$  denotan las coordenadas isoparamétricas del cuadrilátero estándar de cuatro nodos y  $J$  es el jacobiano de la transformación isoparamétrica que relaciona las diferenciales de área en los espacios regular e isoparamétrico de la siguiente manera:

$$d\Omega = J ds dt \quad (67)$$

En la ecuación (66),  $\dot{\tilde{\varepsilon}}_1^{(e)}$  es la deformación mejorada básica, que ya está presente en el elemento S4n, y  $\dot{\tilde{\varepsilon}}_2^{(e)}$  un término de mejora adicional del campo de deformaciones que proporciona el polinomio lineal requerido en las deformaciones del núcleo del elemento. Los valores  $\{\dot{\mathbf{S}}_e\} = [\dot{S}_{xx}, \dot{S}_{yy}, \dot{S}_{xy}]_e^T$  y  $\{\dot{\mathbf{T}}_e\} = [\dot{T}_{xx}, \dot{T}_{yy}, \dot{T}_{xy}]_e^T$  son factores de intensidad de dichas deformaciones que constituyen seis grados de libertad adicionales para el elemento. De la expresión (66) queda claro que la condición de ortogonalidad (65) se satisface para el campo (constante elemento a elemento) de tensiones (51), dado que:

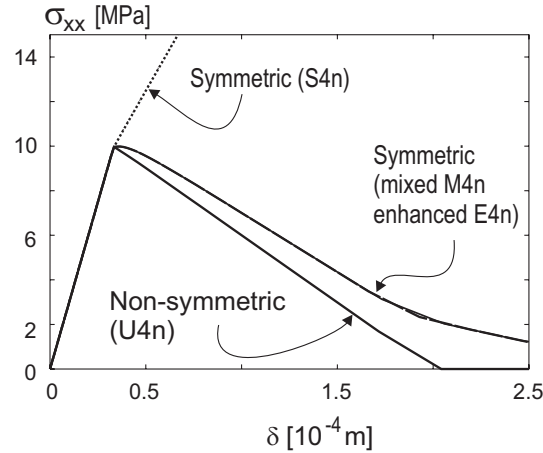


Figura 4. Placa homogénea: tensión  $\sigma_{xx}$  vs. desplazamiento  $\delta$  para diferentes elementos.

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_e} \dot{\tilde{\varepsilon}}_1^{(e)} : \tau_e d\Omega &= \int_{\Omega_e} \left( \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S : \tau_e d\Omega = \\
 &= \underbrace{\int_{\Omega_e} \left( \mu_S^{(e)} \frac{1}{k} - \frac{l_e}{\Omega_e} \right) d\Omega}_{l_e - l_e = 0} (\dot{\beta}_e \otimes \mathbf{n})^S : \tau_e = 0
 \end{aligned} \tag{68}$$

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega_e} \dot{\tilde{\varepsilon}}_2^{(e)} : \tau_e d\Omega &= \int_{\Omega_e} \frac{1}{J} (s \dot{\mathbf{S}}_e + t \dot{\mathbf{T}}_e) : \tau_e d\Omega = \\
 &= \underbrace{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} s ds dt}_{= 0} \dot{\mathbf{S}}_e : \tau_e + \underbrace{\int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} t ds dt}_{= 0} \dot{\mathbf{T}}_e : \tau_e = 0
 \end{aligned} \tag{69}$$

## 10 SIMULACIONES NUMÉRICAS

### 10.1 Placa homogénea

El ejemplo básico de la sección 6 y la figura 3 se analiza ahora para los elementos M4N y E4N. Los resultados, de nuevo en términos de las curvas  $\sigma_{xx} - \delta$ , se presentan en la figura 4 junto con los obtenidos para el elemento S4n y el resultado exacto (U4n).

Se puede observar el drástico efecto en la reducción del bloqueo de tensiones obtenido con los nuevos elementos, lo cual prueba la efectividad de las estrategias adoptadas. Por lo demás, se puede observar que los resultados obtenidos con el elemento M4n (estrategia mixta) y el elemento E4n (estrategia con modos de mejora de adicionales) se parecen bastante, lo que demuestra que el razonamiento hecho en la sección 6 es, en esencia, correcto.

## 11 CONCLUSIONES

En este trabajo se ha explorado la posibilidad de utilizar elementos simétricos con discontinuidades internas estáticamente consistentes para simular discontinuidades fuertes. Se ha demostrado, mediante ejemplos, que el uso de elementos basados en técnicas mixtas (M4n) y en el empleo de mejoramiento adicional de las deformaciones supuestas (E4n) ayuda a disminuir de manera sustancial el bloqueo de tensiones que se observa en el elemento original S4n.

Mediante la utilización de estas técnicas se pretende, esencialmente, 1) recuperar la capacidad del elemento no simétrico U4n de reproducir los movimientos de sólido rígido de las partes en que queda dividido después de ser atravesado por la línea de discontinuidad y 2) conservar el carácter simétrico y la consistencia variacional del elemento S4n.

Un aspecto importante que no ha sido abordado aún es la estabilidad de los elementos propuestos en este trabajo. Se sabe, por ejemplo, que el elemento de cuatro nodos con integración reducida (este es el caso del elemento M4n) produce los llamados modos *hourglass* [10]. Además, los modos de mejora  $\dot{\varepsilon}_2^{(e)}$  de la ecuación (66), considerados para el elemento E4n, no cumplen la condición  $(\mathcal{V}_\varepsilon \cap \mathcal{V}_\varepsilon = \{0\})$  [9]. No obstante, hay un aspecto crucial en la manera en que los elementos propuestos en este trabajo son implementados que hace que su comportamiento, en lo referente a estabilidad, sea muy diferente del de los elementos clásicos. En este trabajo, las formulaciones de los elementos se han realizado en el contexto de un problema de valores de contorno en forma incremental. Esto permite considerar el problema como un conjunto de problemas incrementales que se suceden a lo largo del tiempo, cada uno de los cuales tiene su propia formulación de elementos finitos. La implementación se ha hecho de tal manera que las *modificaciones en el elemento básico S4n*, que conducen a la obtención de los elementos M4n y E4n, *afecten solamente a la banda de elementos que captura la discontinuidad después de que dichos elementos hayan sido cruzados por la discontinuidad*. Los elementos que se encuentran fuera de la banda conservan el comportamiento del elemento original. Esto implica que *el desarrollo y propagación de modos espurios están muy restringidos*. Esto redundante, además, en el hecho de que el costo computacional asociado a la presencia de nuevos grados de libertad sea muy bajo.

Sin embargo, y a pesar de que en las simulaciones realizadas no se han producido inestabilidades numéricas, los autores son conscientes de que esto no puede generalizarse a cualquier tipo o tamaño de problema y de la necesidad de realizar estudios de estabilidad en trabajos futuros.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido realizado en el contexto de los Proyectos de Investigación MAT2000-0436 y MAT-2001-3863-C03-03 financiados por el Ministerio Español de Ciencia y Tecnología. Los autores quieren agradecer este apoyo.

## REFERENCIAS

- [1] F. Armero and K. Garikipati. An Analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in

- solids. *Int. J. Solids and Structures*, **33**(20-22):2863-2885,1996
- [2] M. Jirasek. Comparative study on finite elements with embedded discontinuities. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, (**188**):307-330,2000.
- [3] R. Larsson, K. Runesson, and S. Sture. Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity theory and finite element analysis. *Int. J. Solids and Structures*, **33**(20-22):3081-3101, 1996.
- [4] H.R. Lofti and P. Benson Shing. Embedded representation of fracture in concrete with mixed finite elements. *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **38**:1307-1325, 1995.
- [5] J. Oliver. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, **39**(21):3601-3623, 1996.
- [6] J. Oliver. On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations. *International Journal Solids and Structures*, **37**:7207-7229, 2000.
- [7] J. Oliver, A.E. Huespe, M.D.G. Pulido, and E. Chaves. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, **69**(2):113-136,2002.
- [8] J.C. Simo and T.J.R. Hughes. *Computacional Inelasticity*. Spring, 1998.
- [9] J.C. Simo and S. Rifai. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. *Int. Journ. Num. Meth. Engng.*, **29**:1595-1638, 1990.
- [10] O.C. Zienkiewicz and R.L.Taylor. *The Finite Element Method*. Butterworth-Heinemann, Oxford, UK, 2000.