

SOBRE LA APROXIMACIÓN CONTINUA DE DISCONTINUIDADES EN MECÁNICA DE SÓLIDOS.

J. Oliver, M. Cervera, M.D.G. Pulido y E. Chaves

E.T.S. Enginyers de Camins, Canals i Ports.
Universitat Politècnica de Catalunya (U.P.C.)
Campus Nord U.P.C. (mòdul C-1)
Gran Capitán s/n, 08034 Barcelona, España.
e-mail:oliver@etseccpb.upc.es

Palabras clave: Discontinuidades fuertes, localización, daño continuo, plasticidad.

Resumen. *El trabajo trata de la aproximación de los procesos de formación y desarrollo de discontinuidades en el campo de desplazamientos en problemas de Mecánica de Sólidos. En particular el estudio se centra en la obtención de modelos constitutivos discretos (tracción-salto) a partir de modelos constitutivos de continuo (tensión-deformación) mediante la introducción de cinemáticas de discontinuidad fuerte y la realización del denominado análisis de discontinuidad fuerte. Se analizan dos familias de modelos (daño continuo y plasticidad) y se obtienen, en ambos casos, las condiciones necesarias para la inducción de la discontinuidad.*

1 Introducción

El análisis y simulación de discontinuidades (entendidas como saltos en el campo de desplazamientos) en Mecánica de Sólidos es una materia de singular importancia que puede enfocarse desde ópticas distintas. Tradicionalmente ha sido la Mecánica de Fractura lineal la disciplina encargada de tales análisis. Los intentos de abordar con más profundidad los procesos de formación y propagación de discontinuidades llevaron a desarrollar la Mecánica de Fractura no-lineal o Mecánica de Fractura Cohesiva³ basada esencialmente en la introducción de ecuaciones constitutivas discretas (tracción en la interface de discontinuidad *versus* salto en el campo de desplazamientos) en el seno de un medio generalmente elástico lineal.

En los últimos años, ha surgido una nueva metodología de análisis y simulación de discontinuidades, basada en el concepto de *discontinuidades fuertes*^{1,2,4-7,9-11,13,14,16} que analiza la formación y desarrollo de discontinuidades en el seno de medios gobernados por ecuaciones constitutivas standard o *de continuo* (tensión vs. deformación). En éste contexto las discontinuidades en el campo de desplazamientos inducen un campo de deformaciones no acotado y las condiciones bajo las cuales aquellas ecuaciones constitutivas de continuo son compatibles con estas deformaciones no acotadas son objeto del denominado *análisis de discontinuidad fuerte*.

Como conclusión de dicho análisis se observa la inducción de una ecuación constitutiva tracción-desplazamiento en la interface de la discontinuidad, denominada *ecuación constitutiva discreta*, que es consistente con la ecuación constitutiva *de continuo* original.^{1,2,5,6,16}

Este trabajo profundiza en éste aspecto e intenta plantear sistemáticamente no sólo la obtención de una ecuación constitutiva discreta, sino de la de todo *un modelo constitutivo discreto consistente con la ecuación constitutiva de continuo original* (energía libre ecuación constitutiva, ecuaciones de evolución, variables internas etc.). Para ello se consideran dos familias de ecuaciones constitutivas ampliamente utilizadas en el contexto de discontinuidades fuertes como son los modelos de daños continuo y los modelos elastoplásticos.

Durante el análisis de discontinuidad fuerte se obtienen, paralelamente a las ecuaciones constitutivas discretas, las denominadas *condiciones de discontinuidad fuerte* que pueden entenderse como restricciones sobre los posibles estados tensionales que son compatibles con la inepción de las discontinuidad. Dichas restricciones sugieren la introducción de mecanismos complementarios, como son la consideración de discontinuidades débiles^{8-11,11} (o saltos en el campo de deformaciones) como precursoras de la discontinuidad fuerte y que actúan, a su vez, como mecanismos inductores de aquellas condiciones.

2 Un modelo isotrópico de daño continuo

Consideremos el modelo isotrópico de daño continuo con ablandamiento¹² definido en la Tabla 1,

<i>Energía Libre :</i>	$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = [1 - d(r)] \psi_0(\boldsymbol{\varepsilon})$	$\psi_0 = \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$
<i>Ec. Constitutiva :</i>	$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d) \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}$	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi(\boldsymbol{\varepsilon}, r)}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$
<i>Parámetro de daño :</i>	$d = 1 - \frac{q(r)}{r}$	$0 \leq d \leq 1$
<i>Ec. de evolución :</i>	$\dot{r} = \lambda$	$r \geq r_0$
<i>Criterio de daño :</i>	$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \tau_\sigma - q$	$\left\{ \begin{array}{l} \tau_\sigma = (1 - d) \sqrt{2\psi_0} = \\ = \ \boldsymbol{\sigma}\ _{\mathbf{C}^{-1}} = \sqrt{\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}} \end{array} \right.$
<i>Cond. de Kuhn - Tucker :</i>	$f \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda f = 0$	$\lambda f = 0$
<i>Ley de endurecimiento :</i>	$\dot{q} = \mathcal{H}(r) \dot{r} \quad \left(\mathcal{H} = \frac{\partial q(r)}{\partial r} \right)$	$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{H} \leq 0 \\ q_0 = r_0 = \frac{\sigma_y}{\sqrt{E}} \\ r_0 \geq q \geq 0 \end{array} \right.$

Tabla 1: Modelo constitutivo *continuo* de daño

donde ψ es la energía libre, $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ son, respectivamente los tensores de tensión y de deformación, r es la variable interna (tipo deformación), ψ_0 la energía libre elástica, \mathbf{C} el tensor isotrópico de propiedades elásticas definido por $\mathbf{C} = \bar{\lambda} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + 2\mu \mathbf{I}$ (siendo $\mathbf{1}$ y \mathbf{I} los tensores unitarios de segundo y cuarto orden, respectivamente y $\bar{\lambda}$ y μ los parámetros de Lamé), d la variable de daño definida en términos de la variable de endurecimiento $q(r)$ que, a su vez, evoluciona en función del parámetro de ablandamiento $\mathcal{H} \leq 0$. El parámetro $\lambda \geq 0$ es el multiplicador de daño que participa en las condiciones de Kuhn-Tucker (carga-descarga) donde $f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$ define la superficie de daño en el espacio de tensiones en función de la norma τ_σ y de la variable

de endurecimiento q . El valor r_0 es el umbral que determina el dominio elástico inicial (para $q = r_0$) y que puede caracterizarse como $r_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}}$ en función del límite elástico uniaxial σ_u y del módulo elástico E .

2.1 Integración de la ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva de la Tabla 1 puede ser fácilmente integrada como sigue: sea τ_ε la norma (en la métrica definida por \mathbf{C}) del tensor de deformaciones:

$$\tau_\varepsilon \stackrel{def}{=} \|\varepsilon\|_{\mathbf{C}} = \sqrt{\varepsilon : \mathbf{C} : \varepsilon} \Rightarrow \tau_\sigma = (1 - d) \tau_\varepsilon \quad (1)$$

donde se han tenido en cuenta las ecuaciones de la Tabla 1. Considerando la función de daño $f(\boldsymbol{\sigma}, q)$:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \iff \tau_\sigma - q = (1 - d) \tau_\varepsilon - q = (1 - d) \tau_\varepsilon - (1 - d) r = 0 \quad (2)$$

$$\iff g(\varepsilon, r) \equiv \tau_\varepsilon - r = 0 \quad (3)$$

que pone de manifiesto la total equivalencia de los criterios de daño basados en $f(\boldsymbol{\sigma}, q)$ y $g(\varepsilon, r)$. En particular, del segundo de ellos, aplicando la condición de persistencia $g(\varepsilon, r) = 0$ para el caso de carga ($\dot{r} \geq 0$), se obtiene:

$$\begin{cases} r = \tau_\varepsilon \\ \dot{r} \geq 0 \\ r|_{t=0} = r_0 \end{cases} \Rightarrow \max_{s \in [0, t]} (\tau_\varepsilon^t, r_0) \quad (4)$$

que coincide con la clásica¹² formulación de modelos de daño isotrópico de dicha familia en términos de la norma τ_ε . Obsérvese en el modelo de la Tabla 1 que una vez determinado el valor de r el resto del modelo está perfectamente definido.

3 Cinemática

La descripción de la cinemática para un medio Ω que exhibe una discontinuidad (salto) de valor $[[\mathbf{u}]]$ en el campo de desplazamientos (ver figura 1) a lo largo de una línea (en 2D) o de una superficie (en 3D) denotada por \mathcal{S} , cuya normal es \mathbf{n} , puede hacerse mediante.⁶

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\hat{\mathbf{u}}}(\mathbf{x}, t) + H_{\mathcal{S}} [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) \quad (5)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}(\mathbf{x}, t) = \nabla^s \dot{\mathbf{u}} = \underbrace{\nabla^s \dot{\hat{\mathbf{u}}} + H_{\mathcal{S}} \nabla^s [[\dot{\mathbf{u}}]]}_{\pi} + \delta_{\mathcal{S}} ([[\dot{\mathbf{u}}]]) \otimes \mathbf{n}^s = \underbrace{\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}}_{regular} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}} ([[\dot{\mathbf{u}}]]) \otimes \mathbf{n}^s}_{no\ acotado} \quad (6)$$

donde $(\bullet)^s$ significa la parte simétrica de (\bullet) , $H_{\mathcal{S}}$ es la función escalón situada sobre \mathcal{S} ($H_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = 0 \forall \mathbf{x} \in \Omega^-$, $H_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = 1 \forall \mathbf{x} \in \Omega^+$) y $\delta_{\mathcal{S}}$ es la distribución Delta de Dirac puesta sobre \mathcal{S} obtenida a través de la derivación (en el sentido de las distribuciones) de la función escalón ($\nabla H_{\mathcal{S}}(\mathbf{x}) = \delta_{\mathcal{S}} \mathbf{n}$).

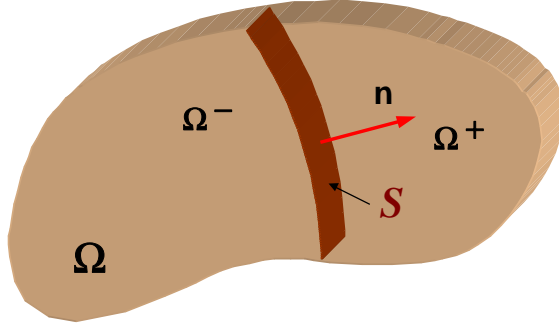


Figura 1: Superficie de discontinuidad en un medio.

En las ecuaciones (5) y (6) $\dot{(\bullet)}$ representa la derivada temporal (tasa) de (\bullet) y $\dot{\mathbf{u}}$ y $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ son la parte regular (acotada) de los campos (tasas) de desplazamiento y de deformación (ver figura 2).

Una versión *regularizada* (mas apropiada para fines computacionales) de la cinemática (6), puede obtenerse mediante la aproximación de la delta de Dirac a través de un *parámetro de regularización* h y de una *función de colocación* μ_S :

$$\delta_S^h(\mathbf{x}) = \frac{1}{h} \mu_S^h(\mathbf{x}) \quad ; \quad \mu_S(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \mathbf{x} \in \mathcal{S} \\ 0 & \mathbf{x} \in \Omega \setminus \mathcal{S} \end{cases} \quad (7)$$

de tal forma que, en el sentido distribucional, $\lim_{h \rightarrow 0} \delta_S^h(\mathbf{x}) = \delta_S$. En este caso la ecuación (6) queda:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) + H_S [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{x}, t) \quad (8)$$

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h(\mathbf{x}, t) = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \delta_S^h ([[\dot{\mathbf{u}}]]) \otimes \mathbf{n}^s = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{regular}} + \underbrace{\frac{1}{h} \mu_S^h ([[\dot{\mathbf{u}}]]) \otimes \mathbf{n}^s}_{\text{no acotado cuando } h \rightarrow 0} \quad (9)$$

4 Análisis de discontinuidad fuerte

El análisis de discontinuidad fuerte tiene por objeto obtener aquellas condiciones que hay que imponer en una ecuación constitutiva standard (tensión-deformación) como la de la Tabla 1 para que sea compatible con las cinemáticas de las ecuaciones (6) y (9) . En particular, el punto de partida del análisis es que tanto las tensiones como sus derivadas temporales deben ser acotadas¹ (incluso cuando las deformaciones no lo son, al producirse la discontinuidad) .

La ecuación constitutiva de la Tabla 1 puede reescribirse como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \underbrace{(1-d)}_{q/r} \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \implies \boldsymbol{\varepsilon} = \frac{r}{q} \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \quad (10)$$

¹Con el fin de mantener su significado físico.

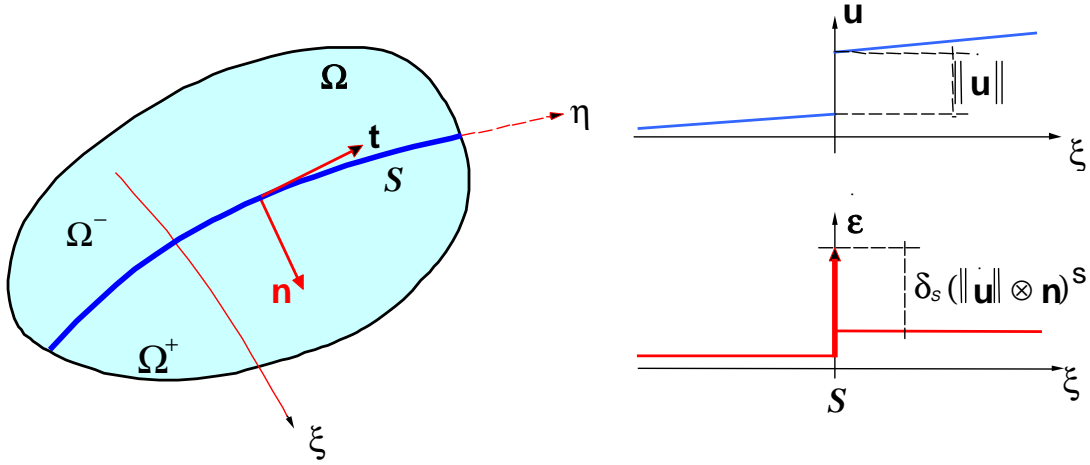


Figura 2: Campo discontinuo de desplazamientos.

y, tomando derivadas temporales:

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{r}{q} \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (11)$$

Considerando ahora las expresiones de las (tasas de) deformación que aparecen en las ecuaciones (9) y (11) se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}^h(\mathbf{x})|_{\mathbf{x} \in S} \stackrel{def}{=} \dot{\varepsilon}_S^h = \underbrace{\dot{\varepsilon}}_{\text{acotado}} + \frac{1}{h} ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n}]^s) = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{r}{q} \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \right]$$

y multiplicando la anterior expresión por h se obtiene, cuando se produce la discontinuidad fuerte ($[[\dot{\mathbf{u}}] \neq 0$) con $h \rightarrow 0$):

$$\lim_{h \rightarrow 0} [h \dot{\varepsilon} + ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n}]^s)] = ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n}]^s) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{hr}{q} \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (12)$$

Puesto que los valores $\boldsymbol{\sigma}$, y q , en la ecuación (12), están acotados (ver Tabla 1) para obtener ($[[\dot{\mathbf{u}}] \neq 0$) debe cumplirse:

$$\lim_{h \rightarrow 0} hr \neq 0 \quad (13)$$

Definiendo ahora un parámetro $\bar{\alpha}$:

$$\bar{\alpha} \stackrel{def}{=} : \begin{cases} \dot{r} = \frac{1}{h} \dot{\bar{\alpha}} \\ \bar{\alpha} \in [0, \infty] \end{cases} \implies r = r_{SD} + \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{1}{h(m)} dm \quad (14)$$

la cual, para el caso particular $h = cte$, se reduce a:

$$\begin{cases} r = r_{sd} + \frac{1}{h} \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha} = h(r - r_{sd}) \end{cases} \quad (15)$$

donde el subíndice $(\bullet)_{sd}$ se refiere a valores particularizados en el instante de tiempo en el que se induce la discontinuidad ($[[\mathbf{u}]]_{sd} = 0, [[\dot{\mathbf{u}}]]_{sd} \neq 0$). Substituyendo la ecuación (15) en la ecuación (12) se obtiene:

$$([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\bar{\alpha}}{q} \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (16)$$

La ecuación (16) es la denominada *ecuación de discontinuidad fuerte*⁹. Por otra parte, substituyendo la ecuación (14) en la Tabla 1 se obtiene:

$$\dot{q} = \mathcal{H} \dot{r} = \mathcal{H} \frac{1}{h} \dot{\bar{\alpha}} \quad (17)$$

y de nuevo, puesto que q esta acotado ($q \in [r_o, 0]$) así como $\bar{\alpha}$ y $\dot{\bar{\alpha}}$, la consistencia matemática de la ecuación (17) requiere que:

$$\mathcal{H} = h\bar{\mathcal{H}} \quad (18)$$

con lo que dicha ecuación queda:

$$\dot{q} = \bar{\mathcal{H}} \dot{\bar{\alpha}} \implies q = q_{sd} + \bar{\mathcal{H}}\bar{\alpha}$$

donde al parámetro $\bar{\mathcal{H}}$ se le denomina *parámetro de ablandamiento intrínseco (o discreto)* en contraposición con el *parámetro de ablandamiento continuo* \mathcal{H} .

El parámetro $\bar{\alpha}$ de la ecuación (14) puede ser reinterpretado como sigue: considerando el régimen de carga ($\dot{r} \neq 0$) la ecuación de consistencia (3) establece que:

$$r = \tau_n = \sqrt{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C} : \boldsymbol{\varepsilon}} \implies \dot{r} = \frac{1}{r} \underbrace{\boldsymbol{\varepsilon} : \mathbf{C}}_{1-d} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{r(1-d)} \underbrace{\boldsymbol{\sigma}}_q : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \frac{1}{q} \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (19)$$

Substituyendo ahora la cinemática (9) en (19) y tomando límites cuando $h \rightarrow 0$:

$$\dot{\bar{\alpha}} = \lim_{h \rightarrow 0} h \dot{r} = \lim_{h \rightarrow 0} h \frac{1}{q} \boldsymbol{\sigma} : \left[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s \right] = \frac{1}{q} \boldsymbol{\sigma} : ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = \frac{1}{q} [[\dot{\mathbf{u}}] \cdot (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) = \frac{1}{q} [[\dot{\mathbf{u}}] \cdot \mathcal{T} \quad (20)$$

donde $\mathcal{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ es el vector de tracciones en la dirección normal a la superficie de discontinuidad \mathcal{S} .

4.1 Ecuación constitutiva discreta.

La ecuación (16) puede ser manipulada como sigue: multiplicando ambos lados por el tensor (constante) \mathbf{C} se obtiene:

$$\mathbf{C} : ([[\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = (\mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) \cdot [[\dot{\mathbf{u}}] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\bar{\alpha}}{q} \boldsymbol{\sigma} \right] \quad (21)$$

y multiplicando de nuevo ambos lados por el vector normal \mathbf{n} (por la derecha):

$$\underbrace{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n})}_{\mathbf{Q}^e} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\bar{\alpha}}{q} \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\bar{\alpha}}{q} \mathcal{T} \right] \implies \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\bar{\alpha}}{q} (\mathbf{Q}^e)^{-1} \cdot \mathcal{T} \right] \quad (22)$$

donde se ha introducido el denominado *tensor acústico elástico*¹⁷ ($\mathbf{Q}^e = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}$)². La ecuación (22) puede ser finalmente integrada resultando :

$$\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \frac{\bar{\alpha}}{q} (\mathbf{Q}^e)^{-1} \cdot \mathcal{T} \implies \mathcal{T} = \frac{q}{\bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (23)$$

Obsérvese que al ecuación (23) es una *ecuación constitutiva discreta* que relaciona las tracciones sobre la superficie de discontinuidad con el salto en el campo de desplazamientos: $\mathcal{T} = \mathcal{T}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$ ³.

Por otra parte, substituyendo la ecuación (23) en la (20) :

$$\dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{q} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \cdot \mathcal{T} = \frac{1}{\bar{\alpha}} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \quad (24)$$

y definiendo:

$$\tau_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \stackrel{def}{=} \|\llbracket \mathbf{u} \rrbracket\|_{\mathbf{Q}^e} = \sqrt{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \implies \dot{\tau}_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \frac{1}{\tau_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket}} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \quad (25)$$

y substituyendo la ecuación (25) en la (24) se obtiene, para el régimen de carga ($\dot{\bar{\alpha}} \neq 0$):

$$\begin{cases} \dot{\bar{\alpha}} \bar{\alpha} = \tau_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \dot{\tau}_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \\ \bar{\alpha}_{sd} = \tau_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket=0} = 0 \end{cases} \implies \bar{\alpha} = \tau_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} \implies \mathcal{G}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha}) \equiv \tau_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} - \bar{\alpha} = 0 \quad (26)$$

Definiendo ahora la norma del vector de tracciones:

$$\tau_{\mathcal{T}} = \frac{q}{\bar{\alpha}} \tau_{\llbracket \mathbf{u} \rrbracket} = \sqrt{\frac{q}{\bar{\alpha}} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \frac{q}{\bar{\alpha}}} = \sqrt{\mathcal{T} \cdot (\mathbf{Q}^e)^{-1} \cdot \mathcal{T}} = \|\mathcal{T}\|_{(\mathbf{Q}^e)^{-1}} \quad (27)$$

donde se ha tenido en cuenta la ecuación (23). A partir de las ecuaciones (23) y (26) es trivial demostrar que, en régimen de carga ($\dot{\bar{\alpha}} \neq 0$):

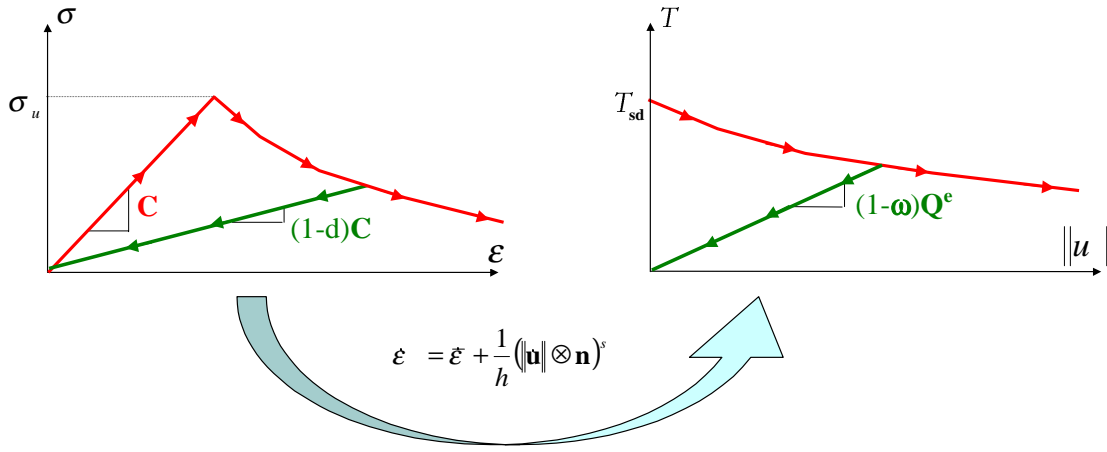
$$\mathcal{G}(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha}) = \frac{\bar{\alpha}}{q} \tau_{\mathcal{T}} - \bar{\alpha} = 0 \iff \mathcal{F}(\mathcal{T}, q) \equiv \tau_{\mathcal{T}} - q = 0 \quad (28)$$

A la vista de las ecuaciones (23) a (28), puede concluirse que el modelo constitutivo continuo de la Tabla 1 induce, en el régimen de discontinuidad fuerte mediante la presencia del campo de deformaciones no acotadas (9), un *modelo constitutivo discreto de daño* que puede ser caracterizado como se indica en la Tabla 2. Obsérvese que la rigidez inicial del modelo es infinita ($(1 - \omega)|_{t=t_{sd}} = \infty$) y que, por tanto, se trata de un *modelo de daño rígido* (ver figura 3).

²Puede demostrarse que \mathbf{Q}^e es no singular ($|\mathbf{Q}^e| \neq 0$) y definido positivo

³Obsérvese que para el instante de inicio de la discontinuidad fuerte, t_{sd} , se cumple, de acuerdo con la condición $\alpha_{sd} = 0$ que $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket = \frac{\alpha}{q} (\mathbf{Q}^e)^{-1} \cdot \mathcal{T}_{sd} = \mathbf{0}$. En consecuencia, la condición inicial de integración, $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket_{sd} = \mathbf{0}$ está satisfecha por la ecuación constitutiva discreta.

<i>Energía libre :</i>	$\varphi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha}) = [1 - \omega(\bar{\alpha})] \varphi_0(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket)$	$\varphi_0 = \frac{1}{2} \llbracket \mathbf{u} \rrbracket \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$
<i>Ec. constitutiva discreta :</i>	$\mathcal{T} = (1 - \omega) \mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \mathbf{u} \rrbracket$	$\mathcal{T} = \frac{\partial \varphi(\llbracket \mathbf{u} \rrbracket, \bar{\alpha})}{\partial \llbracket \mathbf{u} \rrbracket}$
<i>Parámetro de daño discreto :</i>	$\omega = 1 - \frac{q(\bar{\alpha})}{\bar{\alpha}}$	$-\infty \leq \omega \leq 1$
<i>Ec. de evolución :</i>	$\dot{\bar{\alpha}} = \lambda$	$0 \leq \bar{\alpha} \leq \infty$
<i>Criterio de daño :</i>	$\mathcal{F}(\mathcal{T}, q) = \tau_{\mathcal{T}} - q$	$\begin{cases} \tau_{\mathcal{T}} = \ \mathcal{T}\ _{(\mathbf{Q}^e)^{-1}} = \\ = \sqrt{\mathcal{T} : (\mathbf{Q}^e)^{-1} : \mathcal{T}} \end{cases}$
<i>Condición de Kuhn – Tucker :</i>	$\mathcal{F} \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda \mathcal{F} = 0$	$\lambda \dot{\mathcal{F}} = 0$
<i>Ley de endurecimiento discreta :</i>	$\dot{q} = \bar{\mathcal{H}} \dot{\bar{\alpha}} \quad (q = q_{sd} + \bar{\alpha})$	$\begin{cases} \bar{\mathcal{H}} \leq 0 \\ q_D \geq q \geq 0 \end{cases}$

 Tabla 2: Modelo constitutivo *discreto* de daño-rgido

 Figura 3: Ecuación constitutiva de daño: *continua vs. discreta*.

4.2 Condiciones de discontinuidad fuerte

Consideremos un punto \mathcal{P} de la superficie de discontinuidad \mathcal{S} y un sistema local constituido por los tres versores ortogonales $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$ de forma que $\hat{\mathbf{e}}_1$ coincide con la normal a la superficie \mathcal{S} ($\hat{\mathbf{e}}_1 \equiv \mathbf{n}$) y, por consiguiente, $\hat{\mathbf{e}}_2$ y $\hat{\mathbf{e}}_3$ están contenidos en el plano tangente a \mathcal{S} en \mathcal{P} (ver figura 4). Considerando las componentes del salto $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$ y de \mathbf{n} así como del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ y del de deformaciones $\boldsymbol{\varepsilon}$ en dicha base,

$$\begin{aligned}
 \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket &= \begin{bmatrix} \llbracket \dot{u} \rrbracket_1 \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket_2 \\ \llbracket \dot{u} \rrbracket_3 \end{bmatrix} & \mathbf{n} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \llbracket (\dot{\mathbf{u}} \otimes \mathbf{n})^s \rrbracket &= \begin{bmatrix} \llbracket \dot{u} \rrbracket_1 & \frac{1}{2} \llbracket \dot{u} \rrbracket_2 & \frac{1}{2} \llbracket \dot{u} \rrbracket_3 \\ \frac{1}{2} \llbracket \dot{u} \rrbracket_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} \llbracket \dot{u} \rrbracket_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 \boldsymbol{\sigma} &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} & & & \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{29}$$

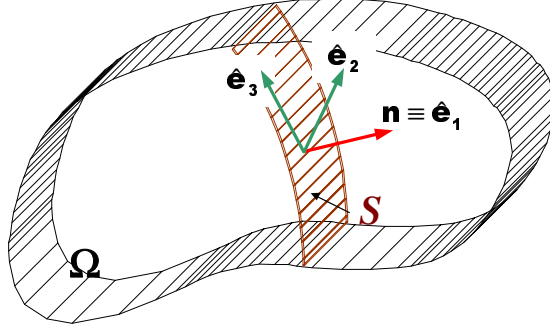


Figura 4: Base local en la superficie de discontinuidad.

$$\begin{bmatrix} [\dot{u}]_1 & \frac{1}{2}[\dot{u}]_2 & \frac{1}{2}[\dot{u}]_3 \\ \frac{1}{2}[\dot{u}]_2 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2}[\dot{u}]_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\alpha}{q} \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{11} & \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\varepsilon}_{13} \\ \bar{\varepsilon}_{12} & \bar{\varepsilon}_{22} & \bar{\varepsilon}_{23} \\ \bar{\varepsilon}_{13} & \bar{\varepsilon}_{23} & \bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} \right) \quad (30)$$

donde se han considerado las componentes $\bar{\varepsilon}_{ij}$ del *tensor de deformaciones efectivas*:

$$\bar{\varepsilon} \stackrel{def}{=} \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} = (1-d)\boldsymbol{\varepsilon} \quad (31)$$

Las componentes $(\bullet)_{11}$ y $(\bullet)_{12}$ y $(\bullet)_{13}$ de la ecuación tensorial (30) ya se han utilizado para obtener la ecuación constitutiva discreta (23). Las demás componentes de dicha ecuación proporcionaran condiciones que deben ser satisfechas una vez se ha inducido la discontinuidad fuerte. En particular las componentes $(\bullet)_{22}$ y $(\bullet)_{23}$ y $(\bullet)_{33}$ conducen a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{q} \bar{\varepsilon}_{22} \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{q} \bar{\varepsilon}_{22} = C_1 \quad \forall t \geq t_{sd} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{q} \bar{\varepsilon}_{33} \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{q} \bar{\varepsilon}_{33} = C_2 \quad \forall t \geq t_{sd} \\ \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{q} \bar{\varepsilon}_{23} \right] &= 0 \Rightarrow \frac{\alpha}{q} \bar{\varepsilon}_{23} = C_3 \quad \forall t \geq t_{sd} \end{aligned} \quad (32)$$

Las constantes de integración C_1 , C_2 y C_3 se obtienen particularizando en el instante t_{sd} donde $\alpha_{sd} = 0$ con lo cual $C_1 = C_2 = C_3 = 0$ obteniéndose:

$$\begin{cases} \bar{\varepsilon}_{22} = [\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}]_{22} = 0 \\ \bar{\varepsilon}_{33} = [\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}]_{33} = 0 \\ \bar{\varepsilon}_{23} = [\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}]_{23} = 0 \end{cases} \quad \forall t \geq t_{sd} \quad (33)$$

Las ecuaciones (33) constituyen las denominadas *condiciones de discontinuidad fuerte* que limitan los estados tensionales bajo los cuales es posible inducir una discontinuidad fuerte¹¹.

4.3 Particularización a problemas bidimensionales

Considerando ahora un problema bidimensional (tensión o deformación plana), un cierto punto de la línea de discontinuidad \mathcal{S} y la base $\hat{\mathbf{e}}_1 \equiv \mathbf{n}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 \equiv \mathbf{t}$ y $\hat{\mathbf{e}}_3$, donde \mathbf{n} y \mathbf{t} son, respectivamente, los vectores normal y tangente, a \mathcal{S} y $\hat{\mathbf{e}}_3$ es el versor perpendicular al plano de análisis, el salto en el campo de desplazamientos puede escribirse como $[[\dot{\mathbf{u}}]] = [[\dot{u}_n]] \mathbf{n} + [[\dot{u}_t]] \mathbf{t}$ y la ecuación constitutiva discreta (23) y las condiciones (33) quedan como se indica en la Tabla 3 dónde se

	<i>Ecuación constitutiva discreta</i>	<i>Condiciones de discontinuidad fuerte</i>
<i>Tensión Plana :</i>	$[[\dot{u}_n]] = \frac{1-\nu^2}{E} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{q} \sigma_{nn} \right]$ $[[\dot{u}_t]] = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{q} \tau_{nt} \right]$	$\sigma_{tt} = \nu \sigma_{nn} \quad \forall t \geq t_{sd}$
<i>Deformación Plana :</i>	$[[\dot{u}_n]] = \frac{1-\nu-2\nu^2}{E(1-\nu)} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{q} \sigma_{nn} \right]$ $[[\dot{u}_t]] = \frac{2(1+\nu)}{E} \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\alpha}{q} \tau_{nt} \right]$	$\sigma_{tt} = \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_{nn} \quad \forall t \geq t_{sd} \quad 0$

Tabla 3: Modelo constitutivo discreto de daño para problemas 2D

ha tenido en cuenta que, en problemas en deformación plana la condición $\bar{\varepsilon}_{33} = 0$ se cumple de forma natural y se ha introducido el módulo elástico E y el coeficiente de Poisson ν .

5 Un modelo de plasticidad J2 (Tipo Von Mises)

Consideremos ahora, como un ejemplo representativo de otra familia completamente distinta de ecuaciones constitutivas, el siguiente modelo¹⁵ de Plasticidad J_2 de la Tabla 4.

<i>Energía libre :</i>	$\psi(\boldsymbol{\varepsilon}, \alpha) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) : \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) + \frac{1}{2} \mathcal{H}(\alpha) \alpha^2$	
<i>Ec. Constitutiva :</i>	$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C} : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p)$	$\boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}}$
<i>Función de fluencia :</i>	$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \frac{1}{\sqrt{2}} \ \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma})\ - q$	$q \in [\tau_y, 0]$
<i>Ec. de evolución :</i>	$\dot{\alpha} = -\lambda \partial_q f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \lambda$	$(\partial_q f(\boldsymbol{\sigma}, q) = -1)$
<i>Regla de flujo :</i>	$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \lambda \partial f(\boldsymbol{\sigma}, q)$	$\begin{cases} \partial f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \mathbf{m} \\ \mathbf{m} = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma})}{\ \mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma})\ } \end{cases}$
<i>Condición de Kuhn – Tucker :</i>	$f \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda f = 0$	$\lambda f = 0$
<i>Ley de endurecimiento :</i>	$\dot{q} = \mathcal{H}(\alpha) \dot{\alpha} \quad \left(\mathcal{H} = \frac{\partial q(\alpha)}{\partial \alpha} \right)$	$\mathcal{H} \leq 0$

Tabla 4: Modelo constitutivo *continuo* de Plasticidad J2

donde ahora $\boldsymbol{\sigma}$, $\boldsymbol{\varepsilon}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}^p$ son los tensores de tensión, de deformación y de deformación plástica, respectivamente, α es la variable interna (tipo deformación), q es su conjugada (variable interna tipo tensión) relacionada con α mediante el parámetro de endurecimiento \mathcal{H} y cuyo rango de variación varía entre τ_y (tensión tangencial uniaxial de fluencia) y 0 (al final del proceso de carga). En las ecuaciones de la Tabla 4 el operador $\mathbf{dev}(\bullet)$ significa la parte desviadora de (\bullet) .

6 Análisis de discontinuidad fuerte

De modo parecido a como se hizo en secciones anteriores se considera la expresión de la tasa de deformación regularizada proveniente de la ecuación cinemática (9) y de la ecuación constitutiva de la Tabla 4 para el caso de carga plástica ($\dot{\alpha} \geq 0$) como:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_S^h = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}}_{\text{acotado}} + \frac{1}{h} ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = \mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma} + \lambda \partial f(\boldsymbol{\sigma}, q) = \underbrace{\mathbf{C}^{-1} : \boldsymbol{\sigma}}_{\text{acotado}} + \dot{\alpha} \frac{1}{\sqrt{2} \|\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|} \quad (34)$$

y multiplicando la ecuación (34) por h y tomando límites cuando $h \rightarrow 0$ se obtiene:

$$([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = \dot{\alpha} h \frac{1}{\sqrt{2} \|\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|} \quad (35)$$

y, de nuevo, suponiendo las tensiones y sus tasas acotadas, la compatibilidad de la actuación (35) en el régimen de discontinuidad fuerte cuando $[\dot{\mathbf{u}}] \neq 0$ y $h \rightarrow 0$ obliga a que:

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \dot{\alpha} \neq 0 \quad (36)$$

lo que lleva a definir el parámetro $\bar{\alpha}$:

$$\dot{\bar{\alpha}} \stackrel{def}{=} \begin{cases} \dot{\alpha} = \frac{1}{h} \dot{\bar{\alpha}} \\ \bar{\alpha} \in [0, \infty] \end{cases} \implies \alpha = \alpha_{sd} + \int_0^{\bar{\alpha}} \frac{1}{h(m)} dm \quad (37)$$

la cual, para el caso particular $h = cte$, se reduce a:

$$\begin{cases} \alpha = \alpha_{sd} + \frac{1}{h} \bar{\alpha} \\ \bar{\alpha} = h(\alpha - \alpha_{sd}) \end{cases} \quad (38)$$

Sustituyendo la ecuación (37) en la ecuación (35) se obtiene para el caso de carga plástica ($\dot{\bar{\alpha}} \geq 0$):

$$([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{n})^s = \dot{\bar{\alpha}} \frac{1}{\sqrt{2} \|\mathbf{dev}(\boldsymbol{\sigma})\|} \quad (39)$$

La ecuación (39) es la versión de la *ecuación de discontinuidad fuerte* para el modelo constitutivo de la Tabla 4. Por otra parte, substituyendo la ecuación (37) en la Tabla 4 se obtiene:

$$\dot{q} = \mathcal{H} \dot{\alpha} = \mathcal{H} \frac{1}{h} \dot{\bar{\alpha}} \quad (40)$$

y de nuevo, puesto que q esta acotado ($q \in [\tau_y, 0]$) así como $\bar{\alpha}$ y $\dot{\bar{\alpha}}$ la consistencia matemática de la ecuación (40) requiere de, forma similar a lo que se hizo en la Sección 4, que:

$$\mathcal{H} = h \bar{\mathcal{H}} \quad (41)$$

con lo que la ecuación (40) queda:

$$\dot{q} = \bar{\mathcal{H}} \dot{\bar{\alpha}} \implies q = q_{sd} + \bar{\mathcal{H}} \bar{\alpha} \quad (42)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \text{esf}(\boldsymbol{\sigma}) + \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) : \begin{cases} \text{esf}(\boldsymbol{\sigma}) = \frac{1}{3} \text{tr}(\boldsymbol{\sigma}) \otimes \mathbf{1} \\ \text{dev}(\boldsymbol{\sigma}) = \boldsymbol{\sigma} - \text{esf}(\boldsymbol{\sigma}) \end{cases} \quad (50)$$

definiremos la *descomposición de un vector \mathcal{T} relativa a un cierto plano de normal \mathbf{n}* en su componente normal ($\mathbf{norm}(\mathcal{T})$) y su componente tangencial ($\mathbf{tang}(\mathcal{T})$) (ver figura 5):

$$\mathcal{T} = \mathbf{norm}(\mathcal{T}) + \mathbf{tang}(\mathcal{T}) : \begin{cases} \mathbf{norm}(\mathcal{T}) = (\mathcal{T} \cdot \mathbf{n}) \otimes \mathbf{n} \\ \mathbf{tang}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} - \mathbf{norm}(\mathcal{T}) \end{cases} \quad (51)$$

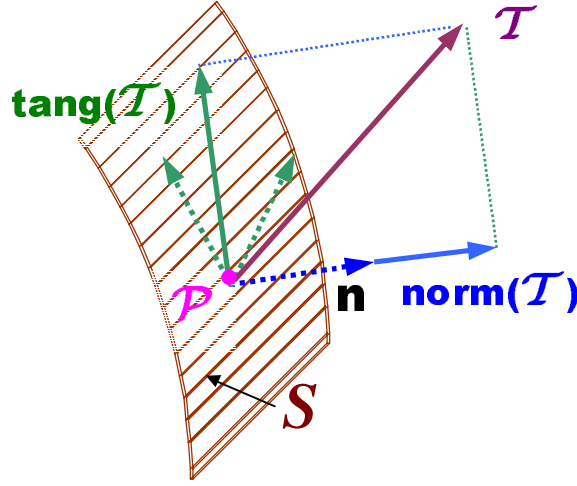


Figura 5: Descomposición asociada a la normal \mathbf{n} .

Consideremos ahora el vector de tracciones sobre la superficie de discontinuidad $\mathcal{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ y el vector salto $[[\hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3]]$, a la vista de las ecuaciones (43) serán:

$$[\mathcal{T}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \quad [[\dot{\mathbf{u}}]] = \begin{bmatrix} [[\dot{u}]_1] \\ [[\dot{u}]_2] \\ [[\dot{u}]_3] \end{bmatrix} \quad (52)$$

siendo sus componentes normal y tangencial:

$$\begin{aligned} [\mathbf{norm}([[\dot{\mathbf{u}}]])] &= \begin{bmatrix} [[\dot{u}]_1] \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & [\mathbf{tang}([[\dot{\mathbf{u}}]])] &= \begin{bmatrix} 0 \\ [[\dot{u}]_2] \\ [[\dot{u}]_3] \end{bmatrix} \\ [\mathbf{norm}(\mathcal{T})] &= \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & [\mathbf{tang}(\mathcal{T})] &= \begin{bmatrix} 0 \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (53)$$

Las ecuaciones(44), (48) y (49) pueden reescribirse ahora para el caso de carga plástica ($\dot{\alpha} \geq 0$) como:

$$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\bar{\alpha}} \frac{\mathbf{tang}(\mathcal{T})}{\|\mathbf{tang}(\mathcal{T})\|} \quad (54)$$

La ecuación (54) es la contrapartida *discreta* (en términos del vector tracción \mathcal{T} y del vector salto $[[\mathbf{u}]]$) de la ecuación constitutiva continua de la Tabla 4.

A la vista de estos resultados puede concluirse que el modelo constitutivo de la Tabla 4 induce, en el régimen de discontinuidad fuerte mediante la presencia del campo de deformaciones no acotadas (9), un *modelo constitutivo discreto de daño continuo* que puede ser caracterizado como se indica en la Tabla 5. Obsérvese que es un modelo elastoplástico con rigidez elástica

<i>Energía libre :</i>	$\psi(\alpha) = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{H}}(\bar{\alpha}) \bar{\alpha}^2$	
<i>Función de fluencia :</i>	$\mathcal{F}(\mathcal{T}, q) = \ \mathcal{T}\ - q$	$q \in [q_{sd}, 0]$
<i>Ec. de evolución :</i>	$\dot{\bar{\alpha}} = -\lambda \partial_q \mathcal{F}(\mathcal{T}, q) = \lambda$	$(\partial_q \mathcal{F}(\mathcal{T}, q) = -1)$
<i>Regla de flujo :</i>	$[[\dot{\mathbf{u}}]] = \lambda \partial_{\mathcal{T}} \mathcal{F}(\mathcal{T}, q) = \lambda \frac{\mathbf{tang}(\mathcal{T})}{\ \mathbf{tang}(\mathcal{T})\ }$	$\begin{cases} \partial_{\mathcal{T}} \mathcal{F}(\mathcal{T}, q) = \\ = \frac{\mathbf{tang}(\mathcal{T})}{\ \mathbf{tang}(\mathcal{T})\ } \end{cases}$
<i>Condición de Kuhn – Tucker :</i>	$\mathcal{F} \leq 0 \quad \lambda \geq 0 \quad \lambda \mathcal{F} = 0$	$\lambda \dot{\mathcal{F}} = 0$
<i>Ley de endurecimiento :</i>	$\dot{q} = \bar{\mathcal{H}}(\bar{\alpha}) \dot{\bar{\alpha}} \quad \left(\bar{\mathcal{H}} = \frac{\partial q(\bar{\alpha})}{\partial \bar{\alpha}} \right)$	$\bar{\mathcal{H}} \leq 0$

Tabla 5: Modelo constitutivo *discreto* rígido-plástico tipo J2

infinita ($\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{0}$) por lo que se trata de un *modelo discreto rígido-plástico* (ver figura 6).

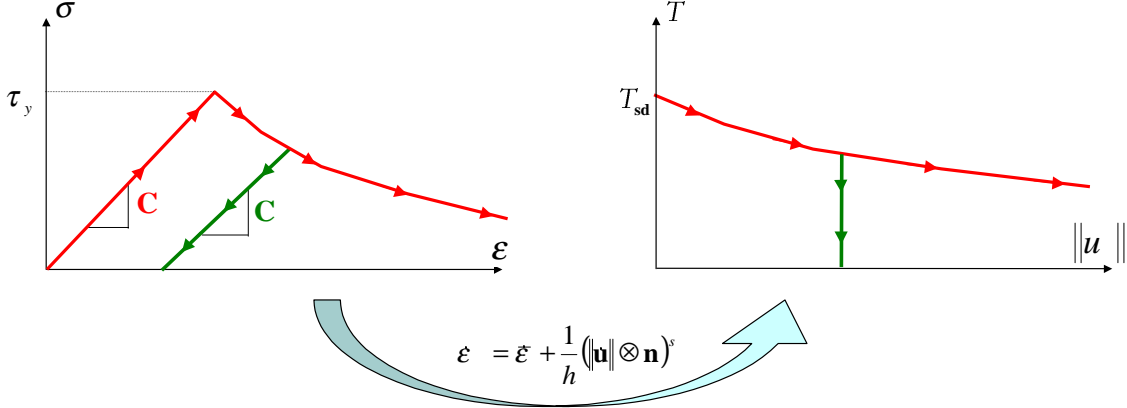


Figura 6: Ecuación constitutiva elasto-plástica: *continua* vs. *discreta*.

Evidentemente las condiciones (46):

$$\begin{cases} S_{22} = 0 \\ S_{33} = 0 \\ S_{23} = 0 \end{cases} \quad (55)$$

son las *condiciones de discontinuidad fuerte* del problema.

6.2 Particularización a problemas bidimensionales

Considerando ahora el problema bidimensional de deformación plana, un cierto punto de la línea de discontinuidad \mathcal{S} y la base $\hat{\mathbf{e}}_1 \equiv \mathbf{n}$, $\hat{\mathbf{e}}_2 \equiv \mathbf{t}$ y $\hat{\mathbf{e}}_3$, la ecuación constitutiva discreta (54) y las condiciones (55) quedan:¹¹

	<i>Ecuación constitutiva discreta</i>	<i>Condiciones de discontinuidad fuerte</i>
<i>Deformación Plana :</i>	$[[\dot{u}_n]] = 0$	$S_{tt} = 0$
	$[[\dot{u}_t]] = \frac{1}{\bar{\mathcal{H}}} \sigma_{nt}$	$S_{33} = 0$

Tabla 6: Modelo constitutivo discreto rígido-plástico en problemas 2D

7 Conclusiones

De los análisis realizados en las secciones anteriores, pueden extraerse las siguientes conclusiones:

- La introducción, en modelos constitutivos *de continuo*, de cinemáticas de discontinuidad fuerte del tipo $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \frac{1}{h} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s$ induce, con el único requerimiento de la regularización del parámetro de ablandamiento *de continuo* (de la forma $\mathcal{H} = h\bar{\mathcal{H}}$), la satisfacción en la interface de la discontinuidad de un *modelo constitutivo discreto*. Dicho modelo, resulta ser una proyección del modelo de continuo sobre dicha interface y *mantiene la esencia del modelo constitutivo original* (daño o plasticidad), con la única particularidad de ser del tipo *rígido* (rígido-daño o rígido-plástico). Su endurecimiento viene regulado por el parámetro de ablandamiento discreto $\bar{\mathcal{H}}$ y la correspondiente ecuación constitutiva viene formulada en términos del vector salto $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ (proyección regularizada del tensor de deformaciones $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^h$) y del vector de tracciones $\mathcal{T} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}$ (proyección del tensor de tensiones $\boldsymbol{\sigma}$).
- Las condiciones de discontinuidad fuerte obtenidas mediante el análisis de discontinuidad fuerte, *son condiciones necesarias para la inducción y mantenimiento de la discontinuidad fuerte*. Dichas condiciones, al no ser trivialmente cumplidas por cualquier estado tensional, constituyen una fuerte *limitación sobre los estados tensionales susceptibles de inducir una discontinuidad fuerte*. En consecuencia, en el contexto de una simulación numérica *discreta* (basada en la introducción directa del modelo constitutivo discreto derivado), no es consistente introducir arbitrariamente la ecuación constitutiva tracción-salto sino que debe comprobarse antes el cumplimiento de aquellas condiciones. En el contexto alternativo de las *aproximaciones continuas* (basadas en la introducción indirecta del modelo discreto al desarrollarse, en el modelo continuo, cinemáticas regularizadas de discontinuidad fuerte) es posible pensar en mecanismos automáticos para el desarrollo de estados tensionales compatibles con las condiciones de discontinuidad fuerte. Los modelos de ancho de banda variable^{8,9,11} son un posible camino para tal fin.

REFERENCIAS

- [1] F. Armero. Localized anisotropic damage of brittle materials. In D. Owen, E. Onate, and E. Hinton, editors, *Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*, pages 635–640, 1997.
- [2] F. Armero and K. Garikipati. An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids. *Int.J. Solids and Structures*, 33(20–22):2863–2885, 1996.
- [3] Z. Bazant and J. Planas. *Fracture and size effect in concrete and other quasibrittle materials*. CRC Press, 1998.
- [4] R. Larsson, K. Runesson, and S. Sature. Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity theory and finite element analysis. *Int.J. Solids and Structures*, 33(20–22):3081–3101, 1996.
- [5] J. Oliver. Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics. In D.R.J. Owen and E. Onate, editors, *Computational Plasticity. Fundamentals and Applications*, volume 1, pages 455–479. Pineridge Press, 1995.
- [6] J. Oliver. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 39(21):3575–3600, 1996.
- [7] J. Oliver. Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 2: Numerical simulation. *Int.J.Num.Meth.Eng.*, 39(21):3601–3623, 1996.
- [8] J. Oliver. The strong discontinuity approach: an overview. In I. S., O. E., and D. E.N., editors, *Computational Mechanics. New Trends and Applications. (WCCM98) Proceedings (CD-ROM) of the IV World Congress on Computational Mechanics*, Barcelona, 1998. CIMNE.
- [9] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. On the use of J2 plasticity models for the simulation of 2D strong discontinuities in solids. In D. Owen, E. Onate, and E. Hinton, editors, *Proc. Int. Conf. on Computational Plasticity*, pages 38–55, Barcelona (Spain), 1997. C.I.M.N.E.
- [10] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids, in: *Material Instabilities in Solids*, edited by R. de Borst and E. van der Giessen, chapter 8, pages 107–123. John Wiley & Sons Ltd., 1998.
- [11] J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models: The strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 15(3):319–351, 1999.
- [12] J. Oliver, M. Cervera, S. Oller, and J. Lubliner. Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete. In N. Bicanic et al., editor, *Proc. SCI-C Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures*, pages 945–957, 1990.
- [13] J. Oliver and J. Simo. Modelling strong discontinuities by means of strain softening constitutive equations. In H. Mang et al., editor, *Proc. EURO-C 1994 Computer Modeling of concrete structures*, pages 363–372, Swansea, 1994. Pineridge Press.
- [14] K. Runesson, D. Peric, and S. Sture. Effect of pore fluid compressibility on localization

- in elastic-plastic porous solids under undrained conditions. *Int. J. Solids Structures*, 33(10):1501–1518, 1996.
- [15] J. Simo and T. Hughes. *Computational Inelasticity*. Springer, 1998.
- [16] J. Simo, J. Oliver, and F. Armero. An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids. *Computational Mechanics*, 12:277–296, 1993.
- [17] P. Steinmann and K. Willam. Finite element analysis of elastoplastic discontinuities. *Journal of Engineering Mechanics*, 120:2428–2442, 1994.