Tema III. Espacios vectoriales

Carmen Moreno

1. Espacios vectoriales

Definición. Sea K un cuerpo conmutativo. Un conjunto V≠∅ posee estructura algebraíca de **espacio vectorial** sobre K cuando:

1) l.c.i. en V:

$$\begin{array}{cccc} +: & V \times V & \to & V \\ & (\mathbf{x},\mathbf{y}) & \mapsto & \mathbf{x}+\mathbf{y} \end{array}$$

(V,+): Grupo Abeliano

2) l.c.externa con dominio de operadores K:

$$\begin{array}{cccc} \bullet: & K \times V & \to & V \\ & (k,\mathbf{x}) & \mapsto & k\bullet\mathbf{x} \end{array}$$

Verificándose:

1. $\lambda\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y})=\lambda\cdot\mathbf{x}+\lambda\cdot\mathbf{y}$
2. $(\lambda+\mu)\cdot\mathbf{x}=\lambda\cdot\mathbf{x}+\mu\cdot\mathbf{x}$
3. $\lambda\cdot(\mu\cdot\mathbf{x})=(\lambda\,\mu)\cdot\mathbf{x}$
4. $1\cdot\mathbf{x}=\mathbf{x}$

Enunciadas $\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}\in\mathbf{V}$, $\forall\, \lambda, \mu \in\mathbf{K}$

$\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$: Vectores
λ, μ: Escalares

Ejemplos de espacios vectoriales

- $\mathbb{R}^2$ es un e.v sobre $\mathbb{R}$
- $\mathbb{R}^n$ es un e.v sobre $\mathbb{R}$
- K^n es un e.v sobre **K**
- $(M_{mxn}(K), +,\cdot)$ e.v.sobre K
- Polinomios de grado menor o igual n con coeficientes en K $(K_n[x], +,\cdot)$
- Funciones reales $(F, +,\cdot)$

Ejercicio

En $\mathbb{R}^3$ se definen las operaciones:

$(x,y,z)+(x',y',z')=(x+x',y+y',z+z')$ y $\lambda\cdot(x,y,z)=(0, \lambda y, \lambda z)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. ¿Es $\mathbb{R}^3$ un e.v. sobre $\mathbb{R}$ con dichas operaciones?

Primeras propiedades

A) Derivadas de ser (V,+) Grupo Abeliano

B) Específicas de espacio vectorial

1. $0_K \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$ para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$

2. $\lambda \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$ para cualquier $\lambda \in \mathbf{K}$

3. $(-\lambda) \cdot \mathbf{x} = \lambda \cdot (-\mathbf{x}) = -(\lambda \cdot \mathbf{x})$

4. Si $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}$, entonces $\lambda = 0_K$ ó $\mathbf{x} = \mathbf{0}$

5. Si $\lambda \cdot \mathbf{x} = \mu \cdot \mathbf{x}$, $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, entonces $\lambda = \mu$

2. Dependencia e independencia lineal

Sea $(V,+,\cdot)$ e.v. sobre K y el sistema de vectores $\{x_1, .., x_m\} \subseteq V$

Definición. El vector $x \in V$ es una <u>combinación lineal</u> de $x_1, .., x_m$ cuando existen escalares $\lambda_1, .., \lambda_m \in K$ tales que $x = \lambda_1 x_1 + .. + \lambda_m x_m$

• $(1,3) \in \mathbb{R}^2$ es c.l. de los vectores (1,1) y (0,1) ya que $(1,3) = 1 \cdot (1,1) + 2 \cdot (0,1)$

Definición.

El sistema $\{x_1, .., x_m\} \subseteq V$ es **<u>ligado</u>** ó los vectores $x_1, .., x_m \in V$ son **<u>linealmente dependientes</u>** (l.d.), cuando existen escalares $\lambda_1, .., \lambda_m \in K$, <u>no todos ellos nulos</u> y una combinación lineal nula de esos vectores:

$$\lambda_1 x_1 + .. + \lambda_m x_m = \mathbf{0}$$

• Los vectores (1,3), (1,1) y (0,1) de $\mathbb{R}^2$ son l.d

$$(-1)\cdot(1,3)+1\cdot(1,1)+2\cdot(0,1)=(0,0)$$

Definición

El sistema $\{x_1, .., x_m\} \subseteq V$ es **<u>libre</u>** ó los vectores $x_1, .., x_m \in V$ son **<u>linealmente independientes</u>** (l.i.), cuando de <u>toda</u> combinación lineal nula de los mismos, $\lambda_1 x_1 + .. + \lambda_m x_m = \mathbf{0}$**,** se deduzca que son nulos todos los escalares: $\lambda_1 = ... = \lambda_m = 0$

• Los vectores (1,2) y (0,1) de $\mathbb{R}^2$ son l.i.: De

$\lambda_1 \cdot (1,2) + \lambda_2 \cdot (0,1) = (0,0)$ se deduce $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$

• Método de Gauss

Propiedades

➢ ***Proposición***. Un sistema de vectores $\{x_1, .., x_n\} \subseteq V$ es ligado **si y sólo si** uno (al menos) de los vectores es c.lineal del resto.

➢ $\{\mathbf{0}\}$: Sistema ligado de V

➢ $\{\mathbf{z}\}$: Sistema libre de V ($\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$)

➢ Cualquier subsistema de un sistema libre es libre

➢ Cualquier sistema que contenga un sistema ligado es ligado

- $\mathbf{0} \in S \Rightarrow S$: ligado

Ejercicios

① Estudiar la dependencia o independencia lineal de los vectores de $\mathbb{R}^3$:

(-1,3,2), (2,-1,3) y (4,-7,-1)

$$\begin{array}{c} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{array}\begin{pmatrix} \boxed{-1} & 3 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & -1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & \boxed{5} & 7 \\ 0 & 5 & 7 \end{pmatrix}\begin{array}{l} v_1' = v_1 \\ v_2' = 2v_1 + v_2 \equiv \\ v_3' = 4v_1 + v_3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} v_1'' = v_1' \\ v_2'' = v_2' \\ v_3'' = -v_2' + v_3' \end{array}$$

$$\vec{0} = v_3'' = -v_2' + v_3' =$$

$$= -(2v_1 + v_2) + (4v_1 + v_3) \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{0} = 2v_1 - v_2 + v_3} \Rightarrow v_2 = 2v_1 + v_3$$

② Hallar el valor de x para que el sistema de vectores de $\mathbb{R}^3$ {(11,-16,x), (2,-1,3), (1,2,1)} sea ligado.

3. Sistemas generadores. Bases

➢ Envoltura lineal

$F=\{x_1, ..., x_n\}\subseteq V$

$\mathcal{L}(F)= \left\{ \sum_{i=1}^{i=n} \lambda \cdot \mathbf{x_i} : \lambda \in \mathbb{K} \right\} \subseteq V =$

= Conjunto de todos los vectores c.l. de los vectores $x_1, ..., x_n$ de F

Ejemplo

$V= \mathbb{R}^2$, $F=\{(1,1), (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$

$(2,3) \in \mathbb{R}^2$

$(2,3) \in \mathcal{L}(F)$ ya que $(2,3)=2\cdot(1,1)+1\cdot(0,1)$

➢ s.g. de V

$F=\{x_1, ..., x_n\}\subseteq V$ es un **s.g.** de V si $\boldsymbol{\mathcal{L}(F)=V}$

$V\subseteq\mathcal{L}(F)$: Todo **v**$\in$V es **c.l** de los vectores de F

•V es un e.v. de tipo finito si posee un s.g. finito

• $\mathbb{R}^2$ es de tipo finito: $F=\{(1,0), (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es un s.g. de $\mathbb{R}^2$:

$\mathbb{R}^2 \subseteq\mathcal{L}(F)$: Todo vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ es c.l. de los vectores de F: $(x,y)=x\cdot(1,0)+y\cdot(0,1)$

➢ Base

$B \subseteq V$ es una **base** de V si :

•B es un sistema libre
•B es un s.g. de V

Ejemplo

•$B=\{(1,0), (0,1)\} \subseteq \mathbb{R}^2$ es una base (canónica) de $\mathbb{R}^2$

• $\mathbb{K}^n$, $B_c=\{\mathbf{e}_1, .., \mathbf{e}_n\}$, $\mathbf{e}_\mathbf{i}=(0,..,1,..,0)$

➢Teorema de la base

Teorema. Sea V un espacio vectorial de <u>tipo finito</u>, $\{0\} \subsetneq V$. Entonces

(1) V posee una base (T. Existencia)

(2) El nº vectores de cualquier sistema libre es $\leq$ nº vectores de cualquier s.g. de V

(3) Todas las bases de V tienen el mismo número de vectores (**dimensión**)

Lema. Si de un s.g. de V se elimina un vector c.l. del resto, el sistema resultante sigue siendo s.g

➢ Dimensión de un e.v.

Es el cardinal de una cualquiera de sus bases

- $\dim(\mathbb{R}^{\mathbf{2}})=2$
- $\dim(\mathbb{R}^{\mathbf{n}})=n$
- $\dim(\mathbb{K}^{n})=n$
- $\dim(\mathbb{K}_n[x])=n+1$: $B_c=\{1, x, x^2, .., x^n\}$
- $\dim(M_{mxn}(\mathbb{K}))=mn$

➢ **Coordenadas** de un vector respecto de una base.

- V, dim(V)=n,

$B=\{v_1, ..., v_n\}$: Base de V

$\Downarrow$

B es un s.g. de V

$\Downarrow$

$V\subseteq\mathcal{L}(B)$

$\Downarrow$

$\mathbf{x}\in V \Rightarrow \mathbf{x}\in\mathcal{L}(B) \Rightarrow \exists\ \alpha_1,..., \alpha_n \in \mathbb{K}$:

$\mathbf{x}= \alpha_1\, \mathbf{v_1}+...+ \alpha_n \mathbf{v_n}$

$$\boxed{\mathbf{x}=(\alpha_1,..., \alpha_n)_B}$$

Coordenadas de **x** resp. de la base B

- Son **únicas**

•Coordenadas de $P=1-2x+3x^2-x^3 \in \mathbb{R}_3[x]$

$P=(1,-2,3,-1)_{Bc}$

• Coordenadas de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$

$A=(1,-2,1,3)_{Bc}$

✓ Estudio de la dependencia lineal de las matrices de $M_2(\mathbb{R})$:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, C=\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

✓ Estudio de la dependencia lineal de los polinomios de $\in \mathbb{R}_2[x]$: $P_1=1-x+x^2$, $P_2=-1+2x^2$, $P_3=-x+2x^2$

✓ Estudio de la dependencia lineal de las funciones e^x, *sen*x y *cos*x de (***F***,+,·)

Corolario.

Si dim(V)=n entonces,

(1) n+1 vectores constituyen un sistema <u>ligado</u>

(2) n-1 vectores <u>no</u> pueden ser un s.g. de V

➢ **Recuerda:** "De todo s.g. de V se puede extraer una base de V"

➢Teorema de ampliación

Todo sistema libre de V puede ser ampliado a una base de V.

• Dar una base de $\mathbb{R}^3$ que contenga al vector (1,2,1)

➢Consecuencia

Si dim (V)=**n**, para que un sistema S de **n** vectores de V sea una base de V basta con que se cumpla una de las dos condiciones siguientes:

(1) S sea un sistema libre de V

(2) S sea un s.g. de V

4. Cambios de base

V, dim(V)=n. Bases $B=\{u_1, \ldots, u_n\}$

$B'=\{v_1, \ldots, v_n\}$

$$x \in V \Rightarrow \begin{cases} x \in L(B) \Rightarrow x = (x_1, \ldots, x_n)_B \\ x \in L(B') \Rightarrow x = (y_1, \ldots, y_n)_{B'} \end{cases}$$

$$x = x_1\mathrm{u}_1 + \cdots + x_n\mathrm{u}_\mathrm{n} = y_1 v_1 + \cdots + y_n v_n \quad (1)$$

$$\mathrm{u}_\mathrm{i} \in L(B') \Rightarrow \begin{array}{l} \mathrm{u}_1 = a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \mathrm{u}_\mathrm{n} = a_{n1}v_1 + \ldots + a_{nn}v_n \end{array}$$

- Sustituyendo los $\mathbf{u_i}$ en (1):

$$x = x_1\mathrm{u}_1 + \cdots x_n\mathrm{u}_\mathrm{n} =$$

$$= x_1(a_{11}v_1 + \ldots + a_{1n}v_n) + \cdots + x_n(a_{n1}v_1 + \ldots + a_{nn}v_n) =$$

$$= (x_1a_{11} + \cdots + x_na_{n1})v_1 + \cdots + (x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn})v_n$$

$$= y_1v_1 + \cdots + y_nv_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1a_{11} + \cdots + x_na_{n1} = y_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1a_{1n} + \cdots + x_na_{nn} = y_n \end{cases}$$

Ecuaciones de un cambio de base

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

(Filas) $\boxed{\mathbf{X_B \cdot C_{BB'} = X_{B'}}}$

➢ Ejemplo

$\mathbb{R}^3$, B={$\mathbf{u_1,u_2,u_3}$} y B′={$\mathbf{v_1,v_2,v_3}$}, donde

$$\mathbf{u_1=-v_2+v_3}$$
$$\mathbf{u_2=v_1+v_2+v_3}$$
$$\mathbf{u_3=v_2}$$

a) Hallar las ecuaciones del cambio de base de B a B′.

b) Halar las coordenadas del vector $x=(7,4,9)_B$ en la base B′.

c) Hallar las coordenadas del vector

$\mathbf{x=-v_1+7v_2-5v_3}$ respecto de la base B.

Ejercicio

Hallar las coordenadas del vector (3,-2,1) respecto de la base {(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)} de $\mathbb{R}^3$

• Tres bases

B_1={(2,1,1), (1,1,1), (1,-1,1)}
B_2={(1,0,1), (-1,1,1), (1,-1,0)}. Hallar C_{B1B2}

5. Subespacios vectoriales. Ecuaciones

- $(V,+,\cdot)$: e.v. Sobre K.

 $S \subseteq V$ es un **subespacio vectorial** de V cuando $(S,+,\cdot)$:e.v. sobre K

- Es CN: $\mathbf{0} \in S$

- <u>Al menos</u> dos s.e.v. **impropios**: V y $\{\mathbf{0}\}$
- $\dim(S) \leq \dim(V)$, siendo $\dim(S)=\dim(V) \Leftrightarrow S=V$

Teorema de caracterización

Un subconjunto $S \neq \emptyset$ de un e.v. V es un subespacio vectorial de V si y sólo si $\forall \mathbf{x},\mathbf{y} \in S$ $\forall \alpha,\beta \in K$ se verifica $\alpha\cdot\mathbf{x}+\beta\cdot\mathbf{y} \in S$

Ejemplo 1

Sea $V=\mathbb{R}^2$. El conjunto $S=\{\lambda\cdot\mathbf{x}: \lambda\in\mathbb{R}\}\subseteq\mathbb{R}^2$ es en s.e.v. de $\mathbb{R}^2$.

Los s.e.v. propios de $\mathbb{R}^2$ son rectas que pasan por el origen (0,0)

Ejemplo 2

Sea V= $\mathbb{R}^3$.

El conjunto $S=\{(x_1,x_2,x_3): x_1-2x_2+3x_3=0\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo 3

Sea V= $\mathbb{R}^3$.

El conjunto $S=\{(x_1,x_2,0): x_1,x_2 \in \mathbb{R}\} \subseteq \mathbb{R}^3$ es un s.e.v. de $\mathbb{R}^3$

Los s.e.v. propios de $\mathbb{R}^3$ son rectas o planos que contienen al vector (0,0,0)

Ejemplo 4

$F=\{x_1,..,x_n\} \subseteq V$. La **envoltura lineal** de F,

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}\textbf{(F)}=\left\{\sum_{i=1}^{i=n} \lambda \cdot \mathbf{x_i} : \lambda \in \mathbb{K}\right\}=\langle F\rangle \quad \subseteq V$$

es un s.e.v. de V: **Subespacio generado por F**

•F es un s.g. del subespacio $\boldsymbol{\mathcal{L}}\textbf{(F)}$

$\Rightarrow$ De F se puede extraer una base de $\boldsymbol{\mathcal{L}}\textbf{(F)}$

➢ Ecuaciones de un subespacio vectorial

(Recta/plano de $\mathbb{R}^3$)

- **Paramétricas**

Parámetros. (Plano : α y β; λ y μ; λ_1 y λ_2

$S=\{\lambda \mathbf{u}+ \mu \mathbf{v}: \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$)

- **Implícitas**

(Plano: Ax+By+Cz=0)

①Ecuaciones paramétricas de un subespacio

V, e.v. , dim(V)=n. B={u_1, ..., u_n}

S, s.e.v. de V, dim(S)=s<n. B_s ={v_1, ...,v_s}

$$x \in S \Rightarrow \begin{cases} x \in L(B_s) \Rightarrow x = (\lambda_1, \dots, \lambda_s)_{B_s} \\ x \in L(B) \Rightarrow x = (x_1, \dots, x_n)_B \end{cases}$$

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_s v_s = x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n \quad (1)$$

$$v_i \in L(B) \Rightarrow \quad v_1 = a_{11} u_1 + \ldots + a_{1n} u_n$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$v_s = a_{s1} u_1 + \ldots + a_{sn} u_n$$

- Sustituyendo los $\mathbf{v_i}$ en (1):

$$x = \lambda_1 v_1 + \cdots \lambda_s v_s =$$
$$= \lambda_1 (a_{11} u_1 + \ldots + a_{1n} u_n) + \cdots + \lambda_s (a_{s1} u_1 + \ldots + a_{sn} u_n) =$$
$$= (\lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_s a_{s1}) u_1 + \cdots + (\lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_s a_{sn}) u_n =$$
$$= x_1 u_1 + \cdots + x_n u_n$$

$$\Rightarrow (1) \begin{cases} \lambda_1 a_{11} + \cdots + \lambda_s a_{s1} = x_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \lambda_1 a_{1n} + \cdots + \lambda_s a_{sn} = x_n \end{cases}$$

Ecuaciones Paramétricas del s.e.v. S

Matricialmente:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & \lambda_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ . & . & . \\ a_{s1} & \cdots & a_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$$

(Filas) $$\boxed{\mathbf{X_{Bs} \cdot B_s = X_B}}$$

Ejemplo 1

V= $\mathbb{R}^3$. Sea S el s.e.v. de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores (1,0,-1), (2,1,1) y (3,1,0). Dar unas ecuaciones paramétricas del s.e.v. S

B=Bc de $\mathbb{R}^3$

$B_s=\{(1,0,-1), (0,1,3)\} \Rightarrow$ Dim (S)=2: **Plano**

$\mathbf{x} \in S$ $\boxed{\mathbf{X_{Bs}\cdot B_s = X_B}}$

$$\begin{pmatrix}\lambda_1 & \lambda_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow (1)\begin{cases}\lambda_1 = x_1\\ \lambda_2 = x_2\\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = x_3\end{cases}$$

Ec. **Paramétricas** de S

$S=\{(\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1+3\lambda_2): \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}=$

$=\{\lambda_1(1,0,-1) + \lambda_2(0,1,3): \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}\}$

② **Ecuaciones implícitas** (o cartesianas) **de S**

- nº ec.Implícitas l.i.de S= dim(V)-dim(S)=n-s
- A partir de las paramétricas, eliminando parámetros.
- Se obtienen anulando n-s menores de orden > s de la matriz ampliada, A*, del sistema (1)

Ejemplo

Ecuaciones **implícitas** del plano S del ejemplo

$$S,\quad (1)\begin{cases} \lambda_1 = x_1 \\ \lambda_2 = x_2 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 = x_3 \end{cases}$$

Sistema (1): Ecuaciones **paramétricas** de S.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = B_s^t \Rightarrow r(A) = r(B_s) = 2$$

$$A^* = \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 3 & x_3 \end{array}\right)$$

(1): Compatible $\Rightarrow$ r(A*) debe ser 2

$$\Rightarrow\ |A^*| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 \\ -1 & 3 & x_3 \end{vmatrix} = 0$$

n-s=3-2=1 ecuación **implícta** del plano S.

$$\boxed{x_1 - 3x_2 + x_3 = 0}$$

Paso de ecuaciones implícitas a paramétricas

• Dar unas ecuaciones paramétricas del s.e.v. S de $\mathbb{R}^3$ de ecuación impícita $x_1-3x_2+x_3=0$ (2).

➢ nº ecs. Implícitas =dim (V) – dim(S) $\Rightarrow$ dim(S) =2: **S: PLANO**

➢ Obtener la base Bs: **dos** vectores l.i. que satisfagan el sistema (2)

$$x_2=\lambda$$
$$x_3=\mu$$
$$x_1=3\lambda-\mu,\quad \lambda,\mu\in\mathbb{R}$$

$$S=\{(3\lambda-\mu,\lambda,\mu):\ \lambda,\mu\in\mathbb{R}\}$$

$$\boxed{B_s=\{(3,1,0),(-1,0,1)\}}$$

$\lambda=1$, $\mu=0$ → $(3,1,0)$

$\mu=1$, $\lambda=0$ → $(-1,0,1)$

$$\boxed{\mathbf{X_{Bs}\cdot B_s=X_B}}$$

6. Interpretación geométrica

- **Los s.e.v. propios de $\mathbb{R}^2$ son rectas que pasan por el origen (0,0)**

- **Los s.e.v. propios de $\mathbb{R}^3$ son rectas o planos que contienen al vector (0,0,0)**